1 METODA NAJMANJŠIH KVADRATOV (MNK)

Geodetska opazovanja pridobimo v postopku izmere in jih obravnavamo kot slučajne spremenljivke, za katere velja, da vsebujejo (vsaj) slučajne pogreške. Ker pogreški v opazovanjh pomenijo tudi pogreške v izračunanih neznankah[1], poskušamo vpliv pogreškov v opazovanjih na neznanke zmanjšati. Ena izmed metod je ta, da izmerimo več opazovanj kot jih nujno potrebujemo za izračun neznank. Na ta način pridobimo nadštevilna opazovanja. Tako imamo:

- n - število opazovanj,
- n_0 - minimalno število opazovanj, ki jih potrebujemo, da izračunamo neznanke (da rešimo funkcionalni model) in
- $r = n - n_0$ - število nadštevilnih opazovanj.

Postopek, ki nam bo podal enolično rešitev neznank na osnovi nadštevilnih opazovanj se imenuje metoda najmanjših kvadratov. Metodo je prvi predstavil francoski matematik Adrien-Marie Legendre leta 1805, ko je metodo uporabil pri postopku določitve oblike Zemlje iz številnih opazovanj (torej za geodetske namene). Štiri leta kasneje (1809) je Carl Friedrich Gauss metodo uporabil za določevanje trajektorij nebesnih teles in trdil (kar se je kasneje izkazalo za pravilno), da je metodo najmanjših kvadratov izpeljal že leta 1795. Neodvisno od obeh je metodo izpeljal tudi ameriški matematik Robert Adrain.

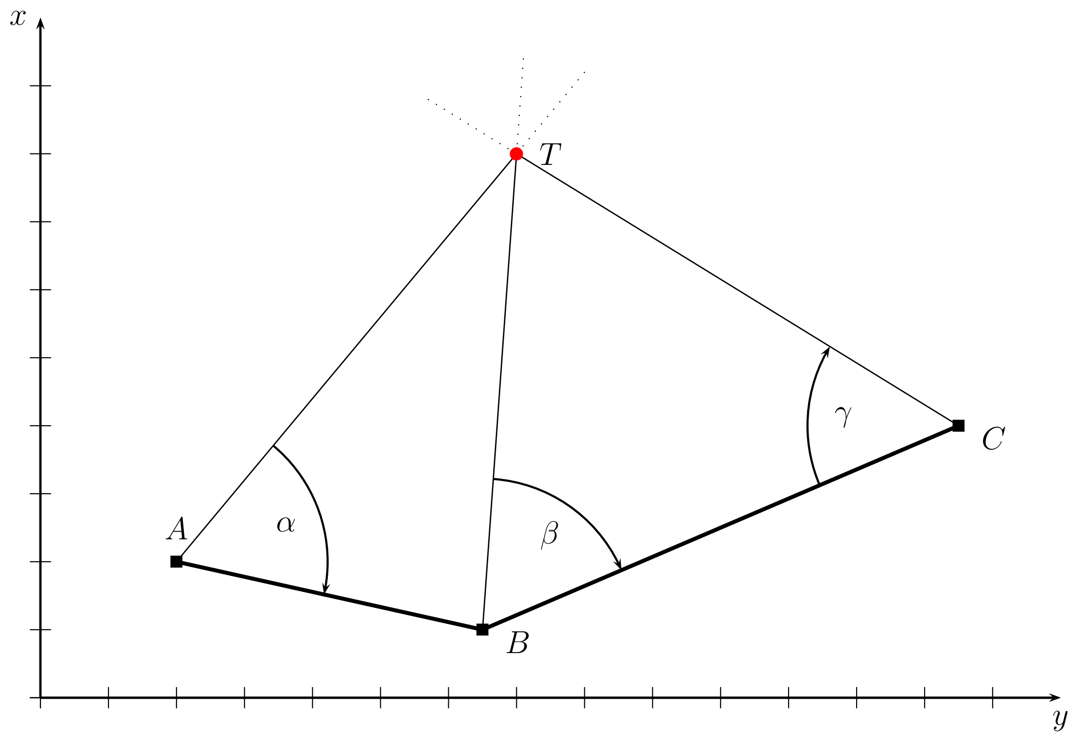
Motiv za metodo najmanjših kvadratov je predstavljen v nadaljevanju.

[1] glej prenos pravih pogreškov

1.1 Motiv

Imamo tri dane točke, A, B in C, ki predstavljajo izhodišče za določitev koordinat nove točke T. Izmerili bi tri kote, α, β in γ, kot prikazuje slika 1, postopek določitve koordinat bi bil torej zunanji urez. Če pogledamo sliko 1, bi za enolično določitev koordinat točke T lahko uporabili katerikoli par opazovanj, in sicer:

- točki A in B ter kota α in β (podano imam tudi točko C),
- točki A in C ter kota α in γ (podano imam tudi točko B) in
- točki B in C ter kota β in γ (podano imam tudi točko A).

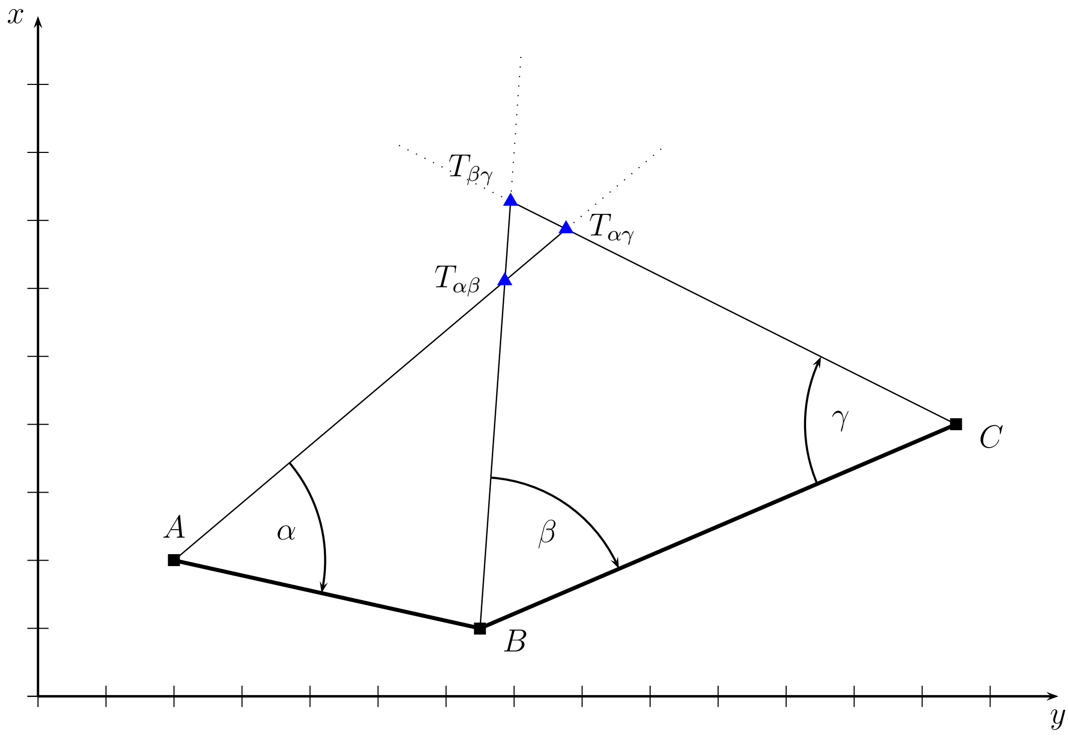


Slika 1: Prikaz podanih treh točk (A, B in C) in izmerjenih kotov (α, β in γ) za določitev koordinat nove točke T

Iz slike 1 bi lahko sklepali, da se vse tri izmerjene smeri proti točki T sekajo v eni sami točki. To bi bilo možno le v primeru, ko bi izmerili popolnoma točne vrednosti opazovanj, kar pa je praktično nemogoče, saj bodo opazovanja vsebovala vsaj slučajne pogreške. Prikaz predstavlja idealno ali teoretično situacijo, medtem ko pravo situacijo po terenski izmeri prikazuje slika 2.

Ko na terenu izmerimo opazovanja, so vsa pogrešena. Posledica prisotnosti pogreškov je ta, da so vsi trije koti malo "napačni". Iz slike je razvidno, da merjeni koti niso skladni z geometrijo danih točk in se smeri proti točki T ne sekajo v isti točki. Posledica je, da nimamo enolične rešitve za določitev koordinat točke T.

Imamo tri ($n = 3$) opazovanja, kjer potrebujemo dve opazovanji za enolično določitev koordinat točke T ($n_0 = 2$). Število nadštevilnih opazovanj je torej ena ($r = n - n_0 = 1$). Iz



Slika 2: Realna situacija določitve koordinat točke T na osnovi kotnih opazovanj z danih točk A, B in C

množice treh opazovanj lahko sestavimo tri podmnožice parov opazovanj, iz katerih lahko enolično izračunamo koordinate točke T. Na sliki so predstavljene vse te tri kombinacije – tri točke, in sicer:

- $T_{\alpha\beta}$ – točka določena na osnovi opazovanj α in β,
- $T_{\alpha\gamma}$ – točka določena na osnovi opazovanj α in γ,
- $T_{\beta\gamma}$ – točka določena na osnovi opazovanj β in γ.

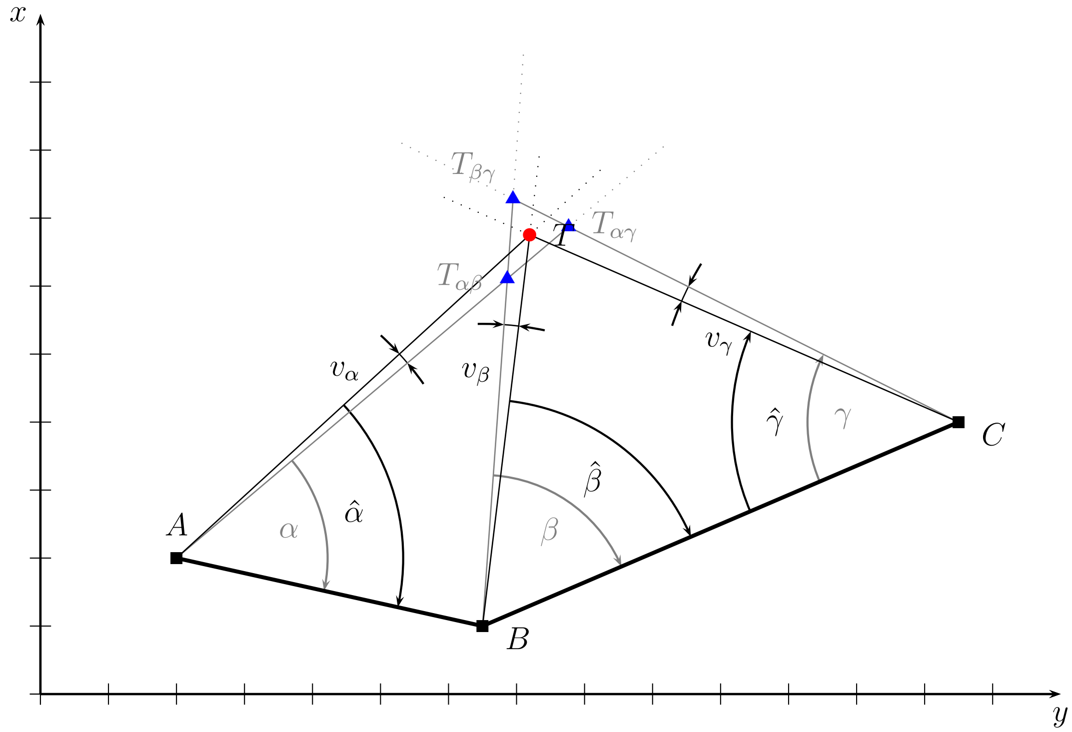
V splošnem na osnovi n opazovanj lahko sestavimo $k = \binom{n}{n_0}$ možnih kombinacij po n_0 opazovanj. Ker opazovanja medseboj niso skladna, bo vsaka izmed teh k kombinacij podala drugačne vrednosti neznank.

Vidimo, da imamo izmerjena opazovanja α, β in γ, ki medseboj niso skladna, podajo nam tri možne točke T. Želeli pa bi imeti taka opazovanja, označimo jih z $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ in $\hat{\gamma}$, ki bodo skladna. To bi pomenilo, da bi lahko vzeli katerikoli par opazovanj, to je $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ali $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ ali $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$, in bi vedno dobili iste vrednosti koordinat točke T.

Metoda najmanjših kvadratov predstavlja eno izmed metod, kjer iz opazovanj (α, β, γ) preidemo na opazovanja $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$, ki bodo zagotovila enolično rešitev. Opazovanja $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ in $\hat{\gamma}$ označimo kot izravnana opazovanja in jih ločimo od merjenih opazovanj s strešico nad oznako opazovanja. Vsako opazovanje (α, β, γ) bomo popravili za neko malo vrednost, ki ji bomo rekli popravek opazovanja $(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$, in tako dobili izravnana opazovanja:

$$\hat{\alpha} = \alpha + v_\alpha \qquad \hat{\beta} = \beta + v_\beta \qquad \hat{\gamma} = \gamma + v_\gamma \tag{1}$$

Cilj je dobiti situacijo, kot jo prikazuje slika 3.



Slika 3: Prikaz metode najmanjših kvadratov pri določitvi koordinat točke T

Slika 3 prikazuje, kako vsa opazovanja pridobijo popravke (kot v enačbi 1), s čimer dobimo izravnana opazovanja, ki se vsa sekajo v isti točki T – zagotavljajo nam torej eno in isto točko T. Postavi pa se vprašanje:

> *Ali je izbira popravkov enolična? Ali obstaja le ena kombinacija popravkov v_α, v_β in v_γ, ki nam da enoličen položaj T?*

Odgovor za zgornje vprašanje je: NE. Obstaja neskončno mnogo trojic popravkov v_α, v_β in v_γ, ki nam dajo enolično rešitev položaja točke T. Vendar pa obstaja samo ena kombinacija popravkov v_α, v_β in v_γ, ki pa nam da optimalno rešitev. Optimalno rešitev dobimo tako, da podamo pogoj, ki mu morajo popravki zadoščati:

$$\Phi = v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \tag{2}$$

Pogoj iz enačbe 2 podaja, da moramo poiskati take popravke opazovanih kotov, da bo vsota njihovih kvadratov najmanjša možna – definirali smo osnovni kriterij metode najmanjših kvadratov. Izpolnjenemu pogoju metode najmanjših kvadratov zadošča samo ena trojica popravkov v_α, v_β in v_γ.

1.2 Karakteristična funkcija MNK

Preden pokažemo postopek MNK, je potrebno točno opisati karakteristično funkcijo MNK Φ iz enačbe 2. Tam smo funkcijo Φ enostavno nastavili kot vsoto kvadratov popravkov opazovanj, nismo pa upoštevali možnih različnih natančnosti opazovanj in možih korelacij med opazovanji. Zato prvo definirajmo, kaj bomo uporabili:

- $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - vektor opazovanj, katerih vrednosti poznamo, saj jih pridobimo v postopku izmere, za vektor $\mathbf{l}$ imamo podan tudi stohastični model (poznamo matriko uteži $\mathbf{P}$),
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - vektor popravkov opazovanj, katerih vrednosti NE poznamo in jih računamo v postopku MNK in
- $\hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \hat{l}_3 & \cdots & \hat{l}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - vektor izravnanih opazovanj, katerih vrednosti NE poznamo in jih tudi računamo v postopku MNK.

Za vse tri vektorje velja povezava $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$. V splošnem funkcijo Φ nastavimo kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} \Rightarrow \min. \tag{3}$$

V enačbi 3 predpostavimo vse možne situacije, kot to, da so opazovanja različne natančnosti, medseboj pa so lahko tudi korelirana. V tem primeru je matrika uteži $\mathbf{P}$ polna matrika. Enačba 3 se poenostavi, ko opazovanja niso korelirana, a so lahko še vedno različnih natančnosti, dobimo:

$$\Phi = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 + \ldots + p_nv_n^2 = \sum_{i=1}^{n} p_iv_i^2 \Rightarrow \min. \tag{4}$$

V enačbi 4 so p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ uteži opazovanj. Ko pa imamo opazovanja, ki so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, pa se enačba 4 (in seveda enačba 3) še bolj poenostavi, dobimo:

$$\Phi = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \Rightarrow \min. \tag{5}$$

Enačba 5 ima vse uteži enake 1 in je enaka enačbi 2, ki smo jo uporabili na koncu poglavja 1.1.

1.2.1 Prikaz karakteristične funkcije na preprostem primeru

Pokažimo vse tri enačbe, 3, 4 in 5, na preprostem primeru. Recimo, da smo dolžino D izmerili trikrat in dobili opazovanja d_1, d_2 in d_3. Predpostavimo, da so opazovanja različne natančnosti in medseboj vsa korelirana. Nastavimo:

- vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,
- matriko uteži $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_2 & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_3 \end{bmatrix}$ in

- nastavimo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Sestavimo funkcijo Φ iz enačbe 3, ki se zapiše kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_2 & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \min. \tag{6}$$

Rezultat karakteristične funkcije Φ iz enačbe 6 je skalar, saj je matrična enačba v obliki kvadratne forme. Če matrike v enačbi 6 pomnožimo, dobimo (prepričajte se sami):

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + 2p_{12}v_1v_2 + 2p_{13}v_1v_3 + 2p_{23}v_2v_3 \Rightarrow \min. \tag{7}$$

Enačba 7 je sestavljena iz dveh delov. Prvi, modri del, prikazuje vsoto uteženih kvadratov popravkov in se nanaša na različne natančnosti opazovanj. Drugi, zeleni del, pa se nanaša na korelacije med opazovanji.

V primeru, ko korelacij med opazovanji ni, potem so vsi korelacijski koeficienti enaki nič, zato postane matrika uteži $\mathbf{P}$ diagonalna matrika. Funkcija Φ iz enačbe 6 se, skladno tudi z enačbo 7, zato zapiše kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{8}$$

Vidimo, da smo dobili ravno funkcijo iz enačbe 4. Če predpostavimo še, da so opazovanja enake natančnosti, potem je matrika uteži $\mathbf{P}$ enotska matrika. Funkcija Φ iz enačbe 6 se, skladno z enačbama 7 in 8, zato zapiše kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{9}$$

Dobili smo torej točno enačbo 5.

1.3 Metodi izračuna po MNK

Spoznali bomo dva različna postopka, dve metodi, ki izravnata opazovanja po MNK, to sta:

- direktna metoda in
- posredna metoda.

Za obe metodi velja, da je potrebno na začetku nastaviti n, n_0 in r ter vektor opazovanj $\mathbf{l}$ s pripadajočo matriko uteži $\mathbf{P}$.

1.3.1 Direktna metoda po MNK

Direktna metoda je tako poimenovana zato, ker iz merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ neposredno (direktno) izračunamo popravke opazovanj $\mathbf{v}$ in iz njih izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$. Postopek je podan v sledečih korakih.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji. Pravila za sestavo pogojnih enačb:

   - Pogojne enačbe vsebujejo samo: **izravnana opazovanja** in **konstante** (dane koordinate, dane višine, 180°, $\pi \dots$).
   - Vsaka pogojna enačba ima lahko poljubno število opazovanj in konstant (seveda v odvisnosti od funkcionalnega modela).
   - V vseh pogojnih enačbah morajo nastopati vsa opazovanja[2].

   Pridobimo r pogojnih enačb, v katerih nastopa n izravnanih opazovanj. Imamo torej sistem r (linearnih) enačb, kjer nastopa več (n) neznanih količin (izravnana opazovanja) kot je enačb (r). Ali lahko rešimo tak sistem? Ja, a ne dobimo enolične (ene same) rešitve.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Še vedno imamo r enačb, v katerih nastopa n neznanih količin, tokrat popravki v_i. Še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov. Enačbe zapišemo tako, da na levi strani enačbe (glede na enačaj) nastopajo samo izpostavljeni popravki (za vsako enačbo eden), na desni strani enačbe (enačaja) pa ostali popravki. Pozor, na desni strani naj se ne pojavi noben popravek iz leve strani in obratno. Še vedno imamo r enačb, v katerih nastopa n neznanih količin, to so popravki v_i, in še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ. Izhajamo iz enačb 3 ali 4 ali 5, v odvisnosti od oblike matrike uteži $\mathbf{P}$.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki. Uporabimo enačbe iz alineje 4, kjer smo izpostavili vse popravke.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ, in sicer: (parcialno) odvajamo karakteristično funkcijo Φ po vseh n_0 popravkih, ki še nastopajo v funkciji Φ. Dobimo niz n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.

[2] V nekaterih primerih bomo določena opazovanja izvzeli iz pogojnih enačb, kar bomo naknadno pojasnili pri takih posebnih primerih.

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov. Uporabimo enačbe iz alineje 4.

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.

1.3.2 Posredna metoda po MNK

Pri posredni metodi v model uvedemo neznanke, ki se bodo izračunale najprej. Na osnovi izračunanih neznank nato izračunamo popravke opazovanj in izravnana opazovanja. Ime metode izhaja torej iz dejstva, da prvo rešimo neznanke, potem pa posredno, preko neznank, še popravke opazovanj in izravnana opazovanja. Postopek je podan spodaj.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model. Običajno so neznanke tiste količine, ki jih moramo izračunati (npr. koordinate, višine točk, elementi trikotnika, koeficienti premice, parabole,...). Pomembno je, da izbira, kaj nastavimo za neznanke, ne vpliva na končne rezultate.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Pravila za sestavo enačb popravkov:

   - Enačbe popravkov vsebujejo samo: **izravnana opazovanja**, **neznanke** in **konstante**
   - Vsaka enačba popravkov ima lahko samo eno opazovanje, poljubno število neznank in konstant (seveda v odvisnosti od funkcionalnega modela).
   - Opazovanje, ki nastopa v enačbi popravkov je vedno na prvem mestu enačbe. Enačba popravkov je vedno oblike $\hat{l}_i - f_i(\text{neznanke}, \text{konstante}) = 0$
   - V vseh enačbah popravkov morajo nastopati vse neznanke[3].

   S sestavo enačb popravkov smo probili n enačb, v katerih nastopa $n + u$ neznanih količin, n izravnanih opazovanj in u neznank. Imamo torej sistem n (linearnih) enačb, kjer nastopa več $(n+u)$ neznanih količin (izravnana opazovanja in neznanke) kot je enačb (n). Ali lahko rešimo tak sistem? Ja, a ne dobimo enolične (ene same) rešitve.

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Še vedno imamo n enačb, v katerih nastopa $n+u$ neznanih količin, tokrat popravki v_i in neznanke. Še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

[3] Ker smo za vsako opazovanje sestavili eno enačbo popravkov, smo pogoj, da morajo biti v vseh enačbah popravkov vsa opazovanja, že izpolnili.

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo. Vsako enačbo zapišemo tako, da na levo stran enačbe damo popravek, da desno stran enačbe pa vse ostalo. Še vedno imamo n enačb, v katerih nastopa $n + u$ neznanih količin, popravki in neznanke. Še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ. Izhajamo iz enačb 3 ali 4 ali 5 v odvisnosti od oblike matrike uteži $\mathbf{P}$.

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo enačbe iz alineje 5, ko smo popravke izpostavili v odvisnosti od neznank.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ, in sicer: (parcialno) odvajamo karakteristično funkcijo Φ po vseh u neznankah, ki nastopajo v funkciji Φ. Dobimo niz u enačb v katerih nastopa u neznank.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz alineje 5.

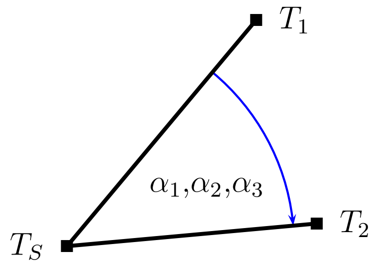
11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

1.4 Primer izračuna po MNK - kot merjen 3-krat

S stojiščne točke T_S smo izmerili kot med točkama T_1 in T_2, kot prikazuje slika 4. Kot smo izmerili trikrat in dobili naslednje rezultate:

$$\alpha_1 = 31°12' \qquad \alpha_2 = 31°14' \qquad \alpha_3 = 31°15'$$

Opazovanja so bila izvedena z enakim inštrumentom, so enake natančnosti in med seboj nekorelirana! Kolikšna znaša po metodi najmanjših kvadratov ocenjena vrednost kota A?



Slika 4: Izmerjen kot A trikrat, opazovanja so α_1, α_2 in α_3

1.4.1 Rešitev po direktni metodi

Rešitev po direktni metodi bomo prikazali po točkah iz poglavja 1.3.1.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

Iz naloge je razvidno, da imamo tri opazovanja, torej $n = 3$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31°12' \\ 31°14' \\ 31°15' \end{bmatrix} \tag{10}$$

Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, je matrika uteži $\mathbf{P}$ enotska matrika, velikosti 3×3. Uteži vseh opazovanj so enake 1 (glej dokument *MNK_PojemUtezi.pdf*):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1 \tag{11}$$

Če želimo določiti vrednost kota, bi nam zadoščalo samo eno opazovanje, torej $n_0 = 1$, s tem imamo število nadštevilnih opazovanj $r = n - n_0 = 2$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
Sestaviti moramo torej $r = 2$ pogojni enačbi, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja (in morebitne konstante). Enačbe se imenujejo "pogojne" zato, ker z njimi opišemo, katerim matematičnim/fizikalnim pogojem morajo izravnana opazovanja zadoščati. Pri našem primeru, ko imamo kot A merjen 3-krat, bi morala biti vsa opazovanja enaka. Iz podatkov je razvidno, da to ne velja, saj imajo opazovanja slučajne pogreške. Veljati pa mora enakost za izravnana opazovanja, naš pogoj je enak:

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 (= A) \tag{12}$$

Pogoj iz enačbe 12 uporabimo za sestavo $r = 2$ pogojnih enačb, ki se glasita:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 \\ F_2 &\equiv \hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Enačbi 13 sta samo dve izmed treh možnih enačb, ki jih lahko sestavimo. Tretja enačba je $\hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_2$, a jo lahko dobimo tako, da od druge enačbe iz 13 odštejemo prvo, kar pomeni, da je tretja enačba linearna kombinacija prvih dveh. To pomeni, da enačbi 13 že vsebujeta vse informacije, ki jih metoda potrebuje. Vidimo tudi, da v dveh enačbah 13 nastopajo tri neznane količine (izravnana opazovanja). Enačbi torej enolično nista rešljivi.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
V enačbi iz 13 vstavimo $\hat{\alpha}_i = \alpha_i + v_i$, $(i = 1, 2, 3)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha_2 + v_2 = \alpha_1 + v_1 \\ F_2 &\equiv \alpha_3 + v_3 = \alpha_1 + v_1 \end{aligned} \tag{14}$$

Tudi preoblikovani enačbi v 14 vsebujeta tri neznane količine, tokrat vse popravke opazovanj.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
Izpostaviti moramo $r = 2$ (ker imamo toliko enačb) popravka v odvisnosti od ostalega $n_0 = 1$ popravka. Glede na enačbi 14 bomo izpostavili popravka v_2 in v_3 v odvisnosti od popravka v_1. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_2 = v_1 + \alpha_1 - \alpha_2 \\ F_2 &\equiv v_3 = v_1 + \alpha_1 - \alpha_3 \end{aligned} \tag{15}$$

Če v enačbi 15 vstavimo vrednosti opazovanj, dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_2 = v_1 - 2' \\ F_2 &\equiv v_3 = v_1 - 3' \end{aligned} \tag{16}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{17}$$

saj imamo opazovanja enake natančnosti, ki so medseboj tudi nekorelirana.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
Če uporabimo enačbi 15 in 16 in jih upoštevamo pri karakteristični funkciji iz enačbe 17 dobimo:

$$\Phi = v_1^2 + (v_1 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + (v_1 + \alpha_1 - \alpha_3)^2 = v_1^2 + (v_1 - 2')^2 + (v_1 - 3')^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{18}$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopa le še popravek v_1, iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$ iz enačbe 18 bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(v_1)$ in ga izenačili z 0.

$$\Phi'(v_1) = \frac{d\Phi}{dv_1} = 2v_1 + 2(v_1 - 2') + 2(v_1 - 3') = 0 \tag{19}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Ker imamo $n_0 = 1$, pomeni, da smo z odvajanjem v enačbi 19 dobili eno enačbo z eno neznanko (v_1). Če enačbo 19 preuredimo in rešimo, dobimo:

$$v_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}{3} = \frac{5'}{3} = 1.7' \tag{20}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
Uporabimo enačbi 15 oziroma 16 in dobimo še ostala dva popravka:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - 2' = -0.3' \\ v_3 &= v_1 - 3' = -1.3' \end{aligned} \tag{21}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 32°13.7' \tag{22}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Neznanka, ki jo iščemo je izravnana vrednost A, ki je:

$$A = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 32°13.7' \tag{23}$$

Na koncu vidimo, da smo za vsa izravnana opazovanja pridobili enako vrednost, temu pogoju morajo izravnana opazovanja tudi zadoščati (glej enačbo 12). Zanima pa nas, kakšne oblike je sploh rešitev, kakšne oblike so izravnana opazovanja in izravnana vrednost kota A. Vemo, da velja $A = \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + v_1$. Če uporabimo za popravek v_1 enačbo 20, potem dobimo:

$$A = \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + v_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}{3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} \tag{24}$$

Enačba 24 prikazuje zelo pomembno lastnost MNK, in sicer, če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, potem je rešitev pri metodi najmanjših kvadratov vedno aritmetična sredina.

1.4.2 Rešitev po posredni metodi

Rešitev po posredni metodi bomo prikazali po točkah iz poglavja 1.3.2.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Ta korak je identičen kot 1. korak direktne metode, zato bomo samo zapisali: $n = 3$, $n_0 = 1$ in $r = n - n_0 = 2$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$ sta (glej enačbi 10 in 11):

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31°12' \\ 31°14' \\ 31°15' \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = 1 \tag{25}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
Pri nalogi smo izmerili tri vrednosti neznanega kota A, zato je smiselno nastaviti neznanko ravno kot A.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Sestavimo torej $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z nezanko. Enačbe popravkov so oblike:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha}_1 = A \\ F_2 &\equiv \hat{\alpha}_2 = A \\ F_3 &\equiv \hat{\alpha}_3 = A \end{aligned} \tag{26}$$

V treh enačbah 26 nastopa ena neznanka in tri izravnana opazovanja, torej 4 neznane količine. Tri enačbe in 4 neznanke pomeni, da sistema enačb ne moremo rešiti enolično.

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   Naredimo zamenjavo $\hat{\alpha}_i = \alpha_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in dobimo:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 + \alpha_1 = A \\ F_2 &\equiv v_2 + \alpha_2 = A \\ F_3 &\equiv v_3 + \alpha_3 = A \end{aligned} \tag{27}$$
   Tudi sedaj ne moremo enolično rešiti enačbe 27, saj imamo še vedno neznanko in tri popravke opazovanj.

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.
   Izpostavimo popravke opazovanj v odvisnosti od neznank. Vse kar nastopa na levi strani, razen popravkov, prenesemo na desno stran:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = A - \alpha_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = A - \alpha_2 \\ F_3 &\equiv v_3 = A - \alpha_3 \end{aligned} \tag{28}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima enako obliko kot pri direktni metodi, in sicer:
$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{29}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
   V karakteristično funkcijo vnesemo enačbe 28, vsak popravek nadomestimo z neznankami:
$$\Phi = (A - \alpha_1)^2 + (A - \alpha_2)^2 + (A - \alpha_3)^2 \Rightarrow \min. \tag{30}$$
   Vidimo, da je tudi tu funkcija Φ odvisna le od enega parametra, to je neznanka A.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(A)$ iz enačbe 30 bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(A)$ in ga izenačili z 0.
$$\Phi'(A) = \frac{d\Phi}{dA} = 2(A - \alpha_1) + 2(A - \alpha_2) + 2(A - \alpha_3) = 0 \tag{31}$$

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank in dobimo njihove vrednosti.
   Imamo samo eno enačbo, v kateri nastopa ena neznanka, to je enačba 31. Rešimo enačbo in poiščemo vrednost neznanke:
$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = 32°13.7' \tag{32}$$
   Iz enačbe je razvidno, da je ocenjena vrednost neznanke kar aritmetična sredina. Dobili smo torej povsem enak rezultat kot pri direktni metodi.

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz alineje 5.
    Uporabimo enačbe 5 in izračunamo popravke:

$$\begin{aligned} v_1 &= A - \alpha_1 = 1.7' \\ v_2 &= A - \alpha_2 = -0.3' \\ v_3 &= A - \alpha_3 = -1.3' \end{aligned} \tag{33}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 32°13.7' \tag{34}$$