Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 1 - VAJE
Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 11. februar 2026

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

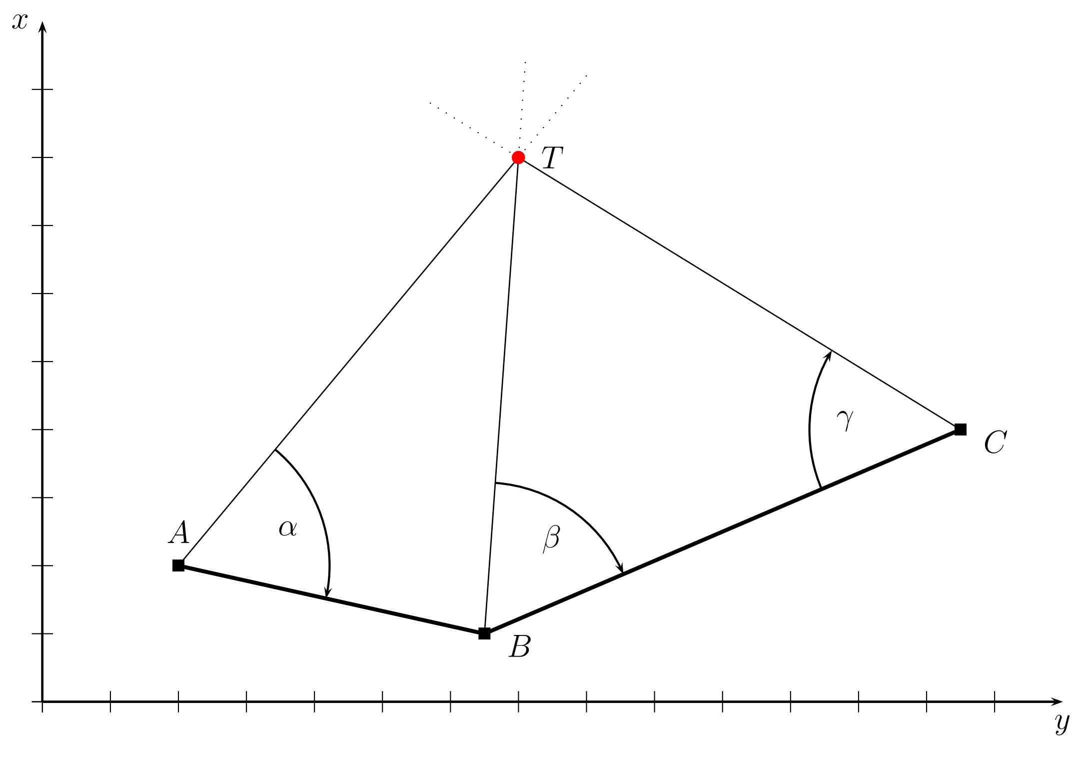
1 Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)

Geodetska opazovanja pridobimo v postopku izmere in jih obravnavamo kot slučajne spremenljivke, za katere velja, da vsebujejo (vsaj) slučajne pogreške. Ker pogreški v opazovanjh pomenijo tudi pogreške v izračunanih neznankah[1] poskušamo vpliv pogreškov v opazovanjih na neznanke zmanjšati. Ena izmed metod je ta, da izmerimo več opazovanj kot jih nujno potrebujemo za izračun neznank. Na ta način pridobimo nadštevilna opazovanja. Tako imamo:

- n - število opazovanj,
- n_0 - minimalno število opazovanj, ki jih potrebujemo, da izračunamo neznanke (da rešimo funkcionalni model) in
- $r = n - n_0$ - število nadštevilnih opazovanj.

Postopek, ki nam bo podal enolično rešitev neznank na osnovi nadštevilnih opazovanj se imenuje metoda najmanjših kvadratov. Metodo je prvi predstavil francoski matematik Adrien-Marie Legendre leta 1805, ko je metodo uporabil pri postopku določitve oblike Zemlje iz številnih opazovanj (torej za geodetske namene). Štiri leta kasneje (1809) je Carl Friedrich Gauss metodo uporabil za določevanje trajektorij nebesnih teles in trdil (kar se je kasneje izkazalo za pravilno), da je metodo najmanjših kvadratov izpeljal že leta 1795. Neodvisno od obeh je metodo izpeljal tudi ameriški matematik Robert Adrain.

1.1 Motiv



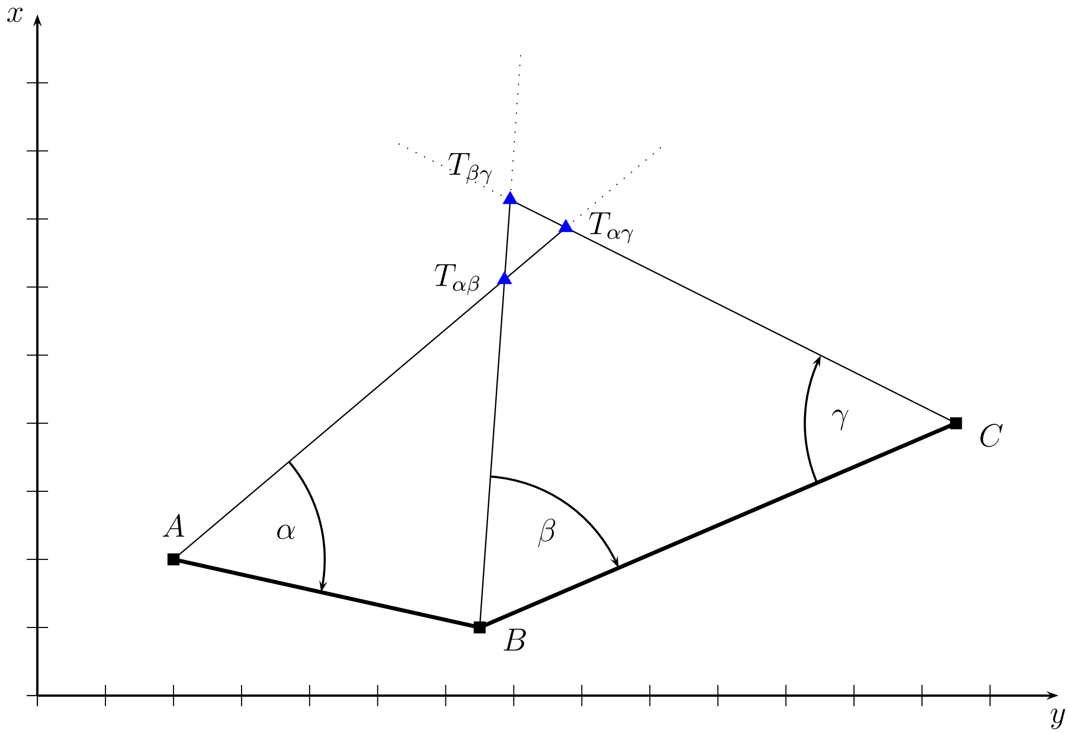
Slika 1–1: Prikaz podanih treh točk (A, B in C) in izmerjenih kotov (α, β in γ) za določitev koordinat nove točke T

[1] glej poglavje *Zakon o prenosu pravih pogreškov*

Imamo tri dane točke, A, B in C, ki predstavljajo izhodišče za določitev koordinat nove točke T. Izmerili bi tri kote, α, β in γ, kot prikazuje slika 1–1, postopek določitve koordinat bi bil torej zunanji urez. Če pogledamo sliko 1–1, bi za enolično določitev koordinat točke T lahko uporabili katerikoli par opazovanj, in sicer:

- točki A in B ter kota α in β (podano imam tudi točko C),
- točki A in C ter kota α in γ (podano imam tudi točko B) in
- točki B in C ter kota β in γ (podano imam tudi točko A).

S slike 1–1 bi lahko sklepali, da se vse tri izmerjene smeri proti točki T sekajo v eni sami točki. To bi bilo možno le v primeru, ko bi izmerili popolnoma točne vrednosti opazovanj, kar pa je praktično nemogoče, saj bodo opazovanja vsebovala vsaj slučajne pogreške. Prikaz predstavlja idealno ali teoretično situacijo, medtem ko pravo situacijo po terenski izmeri prikazuje slika 1–2.



Slika 1–2: Realna situacija določitve koordinat točke T na osnovi kotnih opazovanj z danih točk A, B in C

Ko na terenu izmerimo opazovanja, so vsa pogrešena. Posledica prisotnosti pogreškov je ta, da so vsi trije koti malo "napačni". Iz slike je razvidno, da merjeni koti niso skladni z geometrijo danih točk in se smeri proti točki T ne sekajo v isti točki. Posledica je, da nimamo enolične rešitve za določitev koordinat točke T.

Imamo tri ($n = 3$) opazovanja, kjer potrebujemo dve opazovanji za enolično določitev koordinat točke T ($n_0 = 2$). Število nadštevilnih opazovanj je torej ena ($r = n - n_0 = 1$). Iz množice treh opazovanj lahko sestavimo tri podmnožice parov opazovanj, iz katerih lahko enolično izračunamo koordinate točke T. Na sliki so predstavljene vse te tri kombinacije – tri točke, in sicer:

- $T_{\alpha\beta}$ – točka določena na osnovi opazovanj α in β,
- $T_{\alpha\gamma}$ – točka določena na osnovi opazovanj α in γ,

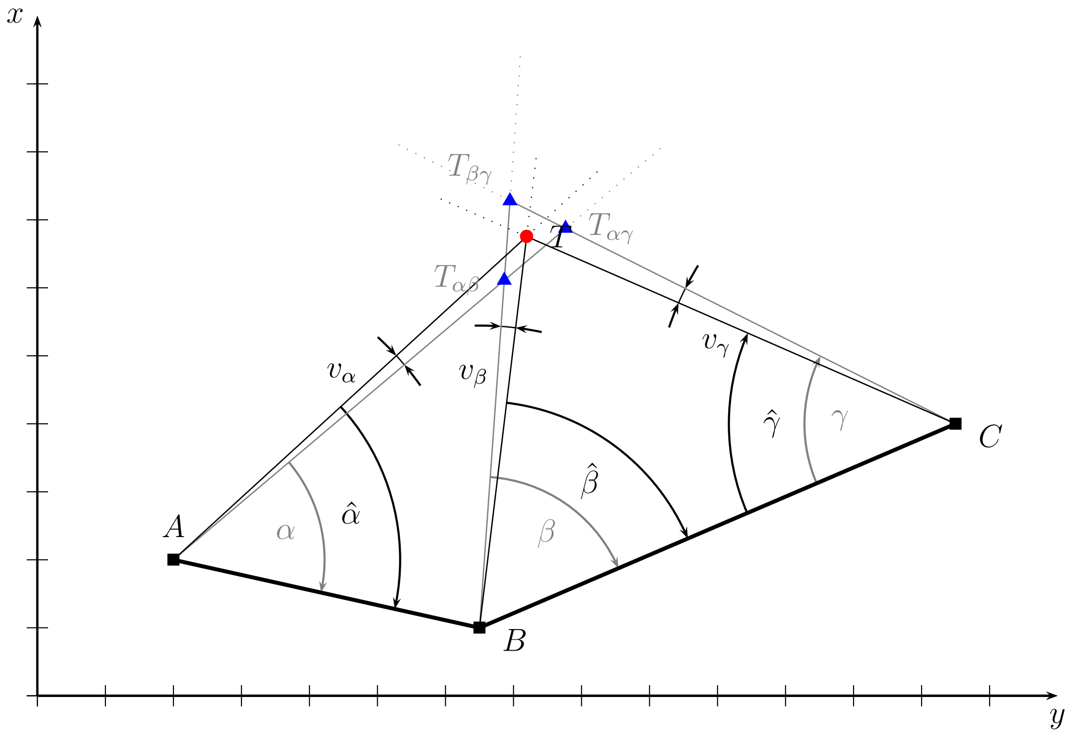
- $T_{\beta\gamma}$ – točka določena na osnovi opazovanj β in γ.

V splošnem na osnovi n opazovanj lahko sestavimo $k = \binom{n}{n_0}$ možnih kombinacij po n_0 opazovanj. Vidimo, da imamo izmerjena opazovanja α, β in γ, ki medseboj niso skladna, zato nam podajo tri možne točke T. Želeli pa bi imeti taka opazovanja, označimo jih z $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ in $\hat{\gamma}$, ki bodo skladna. To bi pomenilo, da bi lahko vzeli katerikoli par opazovanj, to je $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ali $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ ali $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$, in bi vedno dobili iste vrednosti koordinat točke T.

Metoda najmanjših kvadratov predstavlja eno izmed metod, kjer iz opazovanj (α, β, γ) preidemo na opazovanja $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$, ki bodo zagotovila enolično rešitev. Opazovanja $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ in $\hat{\gamma}$ označimo kot izravnana opazovanja in jih ločimo od merjenih opazovanj s strešico nad oznako opazovanja. Vsako opazovanje (α, β, γ) bomo popravili za neko malo vrednost, ki ji bomo rekli popravek opazovanja $(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$, in tako dobili izravnana opazovanja:

$$\hat{\alpha} = \alpha + v_\alpha \qquad \hat{\beta} = \beta + v_\beta \qquad \hat{\gamma} = \gamma + v_\gamma \tag{1–1}$$

Cilj je dobiti situacijo, kot jo prikazuje slika 1–3.



Slika 1–3: Prikaz metode najmanjših kvadratov pri določitvi koordinat točke T

Slika 1–3 prikazuje, kako vsa opazovanja pridobijo popravke (kot v enačbi (1–1)), s čimer dobimo izravnana opazovanja, ki se vsa sekajo v isti točki T – zagotavljajo nam torej eno in isto točko T. Postavi pa se vprašanje:

> *Ali je izbira popravkov enolična? Ali obstaja le ena kombinacija popravkov v_α, v_β in v_γ, ki nam da enoličen položaj T?*

Odgovor za zgornje vprašanje je: NE. Obstaja neskončno mnogo trojic popravkov v_α, v_β in v_γ, ki nam dajo enolično rešitev položaja točke T. Vendar pa obstaja samo ena kombinacija popravkov v_α, v_β in v_γ, ki pa nam da optimalno rešitev. Optimalno rešitev dobimo tako, da podamo pogoj, ki mu morajo popravki zadoščati:

$$\Phi = v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \tag{1–2}$$

Pogoj iz enačbe (1–2) podaja, da moramo poiskati take popravke opazovanih kotov, da bo vsota njihovih kvadratov najmanjša možna – definirali smo osnovni kriterij metode najmanjših kvadratov. Izpolnjenemu pogoju metode najmanjših kvadratov zadošča samo ena trojica popravkov v_α, v_β in v_γ.

1.2 Karakteristična funkcija MNK

Preden pokažemo postopek MNK, je potrebno točno opisati karakteristično funkcijo MNK Φ iz enačbe (1–2). Tam smo funkcijo Φ enostavno nastavili kot vsoto kvadratov popravkov opazovanj, nismo pa upoštevali možnih različnih natančnosti opazovanj in možih korelacij med opazovanji. Zato prvo definirajmo, kaj bomo uporabili:

- $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ - vektor opazovanj, katerih vrednosti poznamo, saj jih pridobimo v postopku izmere, za vektor $\mathbf{l}$ imamo podan tudi stohastični model (poznamo matriko uteži $\mathbf{P}$),
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ - vektor popravkov opazovanj, katerih vrednosti NE poznamo in jih računamo v postopku MNK in
- $\hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \hat{l}_3 & \cdots & \hat{l}_n \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ - vektor izravnanih opazovanj, katerih vrednosti NE poznamo in jih tudi računamo v postopku MNK.

Za vse tri vektorje velja povezava $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$. V splošnem funkcijo Φ nastavimo kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{v} \Rightarrow \min. \tag{1–3}$$

V enačbi (1–3) predpostavimo vse možne situacije, kot to, da so opazovanja različne natančnosti, medseboj pa so lahko tudi korelirana. V tem primeru je matrika uteži $\mathbf{P}$ polna matrika. Enačba (1–3) se poenostavi, ko opazovanja niso korelirana, a so lahko še vedno različnih natančnosti, dobimo:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \ldots + p_n v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 \Rightarrow \min. \tag{1–4}$$

V enačbi (1–4) so p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ uteži opazovanj. Ko pa imamo opazovanja, ki so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, pa se enačba (1–4) (in seveda enačba (1–3)) še bolj poenostavi, dobimo:

$$\Phi = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \Rightarrow \min. \tag{1–5}$$

Enačba (1–5) ima vse uteži enake 1 in je enaka enačbi (1–2), ki smo jo uporabili na koncu poglavja 1.1.

1.2.1 Prikaz karakteristične funkcije na preprostem primeru

Pokažimo vse tri enačbe, (1–3), (1–4) in (1–5), na preprostem primeru. Recimo, da smo dolžino D izmerili trikrat in dobili opazovanja d_1, d_2 in d_3. Predpostavimo, da so opazovanja različne natančnosti in medseboj vsa korelirana. Nastavimo:

- vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^\mathrm{T}$,

- matriko uteži $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_2 & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_3 \end{bmatrix}$ in
- nastavimo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Sestavimo funkcijo Φ iz enačbe (1–3), ki se zapiše kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_2 & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \min. \tag{1–6}$$

Rezultat karakteristične funkcije Φ iz enačbe (1–6) je skalar, saj je matrična enačba v obliki kvadratne forme. Če matrike v enačbi (1–6) pomnožimo, dobimo (prepričajte se sami):

$$\Phi = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 + 2p_{12}v_1v_2 + 2p_{13}v_1v_3 + 2p_{23}v_2v_3 \Rightarrow \min. \tag{1–7}$$

Enačba (1–7) je sestavljena iz dveh delov. Prvi, modri del, prikazuje vsoto uteženih kvadratov popravkov in se nanaša na različne natančnosti opazovanj. Drugi, zeleni del, pa se nanaša na korelacije med opazovanji.

V primeru, ko korelacij med opazovanji ni, potem so vsi korelacijski koeficienti enaki nič ($\rho_{ij} = 0$), zato postane matrika uteži $\mathbf{P}$ diagonalna matrika. Funkcija Φ iz enačbe (1–6) se, skladno tudi z enačbo (1–7), zato zapiše kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{1–8}$$

Vidimo, da smo dobili ravno funkcijo iz enačbe (1–4). Če predpostavimo še, da so opazovanja enake natančnosti, potem je matrika uteži $\mathbf{P}$ enotska matrika. Funkcija Φ iz enačbe (1–6) se, skladno z enačbama (1–7) in (1–8), zato zapiše kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{1–9}$$

Dobili smo torej točno enačbo (1–5).

1.3 Metodi izračuna po MNK

Spoznali bomo dva različna postopka, dve metodi, ki izravnata opazovanja po MNK, to sta:

- **direktna metoda** in
- **posredna metoda**.

Za obe metodi velja, da je potrebno na začetku nastaviti n, n_0 in r ter vektor opazovanj $\mathbf{l}$ s pripadajočo matriko uteži $\mathbf{P}$.

1.3.1 Direktna metoda po MNK

Direktna metoda je tako poimenovana zato, ker iz merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ neposredno (direktno) izračunamo popravke opazovanj $\mathbf{v}$ in iz njih izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$. Postopek je podan v sledečih korakih.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji. Pravila za sestavo pogojnih enačb:

   - Pogojne enačbe vsebujejo samo: **izravnana opazovanja** in **konstante** (dane koordinate, dane višine, 180°, π...).
   - Vsaka pogojna enačba ima lahko poljubno število opazovanj in konstant (seveda v odvisnosti od funkcionalnega modela).
   - V vseh pogojnih enačbah morajo nastopati vsa opazovanja[2].

   Pridobimo r pogojnih enačb, v katerih nastopa n izravnanih opazovanj. Imamo torej sistem r (linearnih) enačb, kjer nastopa več (n) neznanih količin (izravnana opazovanja) kot je enačb (r). Ali lahko rešimo tak sistem? Ja, a ne dobimo enolične (ene same) rešitve.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Še vedno imamo r enačb, v katerih nastopa n neznanih količin, tokrat popravki v_i. Še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov. Enačbe zapišemo tako, da na levi strani enačbe (glede na enačaj) nastopajo samo izpostavljeni popravki (za vsako enačbo eden), na desni strani enačbe (enačaja) pa ostali popravki. Pozor, na desni strani naj se ne pojavi noben popravek iz leve strani in obratno. Še vedno imamo r enačb, v katerih nastopa n neznanih količin, to so popravki v_i, in še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ. Izhajamo iz enačb (1–3) ali (1–4) ali (1–5), v odvisnosti od oblike matrike uteži $\mathbf{P}$.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki. Uporabimo enačbe iz alineje 4, kjer smo izpostavili vse popravke.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ, in sicer: (parcialno) odvajamo karakteristično funkcijo Φ po vseh n_0 popravkih, ki še nastopajo v funkciji Φ. Dobimo niz n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov. Uporabimo enačbe iz alineje 4.

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.

[2] V nekaterih primerih bomo določena opazovanja izvzeli iz pogojnih enačb, kar bomo naknadno pojasnili pri takih posebnih primerih.

1.3.2 Posredna metoda po MNK

Pri posredni metodi v model uvedemo neznanke, ki se bodo izračunale najprej. Na osnovi izračunanih neznank nato izračunamo popravke opazovanj in izravnana opazovanja. Ime metode izhaja torej iz dejstva, da prvo rešimo neznanke, potem pa posredno, preko neznank, še popravke opazovanj in izravnana opazovanja. Postopek je podan spodaj.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model. Običajno so neznanke tiste količine, ki jih moramo izračunati (npr. koordinate, višine točk, elementi trikotnika, koeficienti premice, parabole,...). Pomembno je, da izbira, kaj nastavimo za neznanke, ne vpliva na končne rezultate.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Pravila za sestavo enačb popravkov:

   - Enačbe popravkov vsebujejo samo: **izravnana opazovanja**, **neznanke** in **konstante**
   - Vsaka enačba popravkov ima lahko samo eno opazovanje, poljubno število neznank in konstant (seveda v odvisnosti od funkcionalnega modela).
   - Opazovanje, ki nastopa v enačbi popravkov je vedno na prvem mestu enačbe. Enačba popravkov je vedno oblike $\hat{l}_i - f_i(\text{neznanke}, \text{konstante}) = 0$
   - V vseh enačbah popravkov morajo nastopati vse neznanke[3].

   S sestavo enačb popravkov smo dobili n enačb, v katerih nastopa $n + u$ neznanih količin, n izravnanih opazovanj in u neznank. Imamo torej sistem n (linearnih) enačb, kjer nastopa več $(n+u)$ neznanih količin (izravnana opazovanja in neznanke) kot je enačb (n). Ali lahko rešimo tak sistem? Ja, a ne dobimo enolične (ene same) rešitve.

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Še vedno imamo n enačb, v katerih nastopa $n+u$ neznanih količin, tokrat popravki v_i in neznanke. Še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo. Vsako enačbo zapišemo tako, da na levo stran enačbe damo popravek, da desno stran enačbe pa vse ostalo. Še vedno imamo n enačb, v katerih nastopa $n + u$ neznanih količin, popravki in neznanke. Še vedno ne moremo enolično rešiti sistema enačb.

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ. Izhajamo iz enačb (1–3) ali (1–4) ali (1–5) v odvisnosti od oblike matrike uteži $\mathbf{P}$.

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo enačbe iz alineje 5, ko smo popravke izpostavili v odvisnosti od neznank.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ, in sicer: (parcialno) odvajamo karakteristično funkcijo Φ po vseh u neznankah, ki nastopajo v funkciji Φ. Dobimo niz u enačb v katerih nastopa u neznank.

[3]Ker smo za vsako opazovanje sestavili eno enačbo popravkov, smo pogoj, da morajo biti v vseh enačbah popravkov vsa opazovanja, že izpolnili.

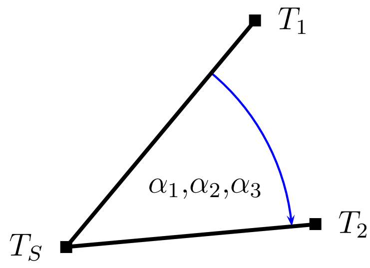
9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.
10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz alineje 5.
11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

1.4 Primer 1 – Kot merjen 3-krat

S stojiščne točke T_S smo izmerili kot med točkama T_1 in T_2, kot prikazuje slika 1–4. Kot smo izmerili trikrat in dobili naslednje rezultate:

$\alpha_1 = 31°12'$ $\alpha_2 = 31°14'$ $\alpha_3 = 31°15'$

Opazovanja so bila izvedena z enakim inštrumentom, so enake natančnosti in med seboj nekorelirana! Kolikšna znaša po metodi najmanjših kvadratov ocenjena vrednost kota A?



Slika 1–4: Izmerjen kot A trikrat, opazovanja so α_1, α_2 in α_3

1.4.1 Direktna metoda

Rešitev po direktni metodi bomo prikazali po točkah iz poglavja 1.3.1.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da imamo tri opazovanja, torej $n = 3$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31°12' \\ 31°14' \\ 31°15' \end{bmatrix} \tag{1–10}$$
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, je matrika uteži $\mathbf{P}$ enotska matrika, velikosti 3×3. Uteži vseh opazovanj so enake 1 (glej poglavje *Uteži geodetskih opazovanj*):
   $$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1 \tag{1–11}$$
   Če želimo določiti vrednost kota, bi nam zadoščalo samo eno opazovanje, torej $n_0 = 1$, s tem imamo število nadštevilnih opazovanj $r = n - n_0 = 2$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Sestaviti moramo torej $r = 2$ pogojni enačbi, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja (in morebitne konstante). Enačbe se imenujejo "pogojne" zato, ker z njimi opišemo, katerim matematičnim/fizikalnim pogojem morajo izravnana opazovanja zadoščati. Pri našem primeru, ko imamo kot A merjen 3-krat, bi morala biti vsa opazovanja enaka. Iz podatkov je razvidno, da to ne velja, saj imajo opazovanja slučajne pogreške. Veljati pa mora enakost za izravnana opazovanja, naš pogoj je enak:
   $$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 (= A) \tag{1–12}$$

Pogoj iz enačbe (1–12) uporabimo za sestavo $r = 2$ pogojnih enačb, ki se glasita:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 \\ F_2 &\equiv \hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_1 \end{aligned} \tag{1–13}$$

Enačbi (1–13) sta samo dve izmed treh možnih enačb, ki jih lahko sestavimo. Tretja enačba je $\hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_2$, a jo lahko dobimo tako, da od druge enačbe iz (1–13) odštejemo prvo, kar pomeni, da je tretja enačba linearna kombinacija prvih dveh. To pomeni, da enačbi (1–13) že vsebujeta vse informacije, ki jih metoda potrebuje. Vidimo tudi, da v dveh enačbah (1–13) nastopajo tri neznane količine (izravnana opazovanja). Enačbi torej enolično nista rešljivi.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
V enačbi iz (1–13) vstavimo $\hat{\alpha}_i = \alpha_i + v_i$, $(i = 1, 2, 3)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha_2 + v_2 = \alpha_1 + v_1 \\ F_2 &\equiv \alpha_3 + v_3 = \alpha_1 + v_1 \end{aligned} \tag{1–14}$$

Tudi preoblikovani enačbi v (1–14) vsebujeta tri neznane količine, tokrat vse popravke opazovanj.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
Izpostaviti moramo $r = 2$ (ker imamo toliko enačb) popravka v odvisnosti od ostalega $n_0 = 1$ popravka. Glede na enačbi (1–14) bomo izpostavili popravka v_2 in v_3 v odvisnosti od popravka v_1. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_2 = v_1 + \alpha_1 - \alpha_2 \\ F_2 &\equiv v_3 = v_1 + \alpha_1 - \alpha_3 \end{aligned} \tag{1–15}$$

Če v enačbi (1–15) vstavimo vrednosti opazovanj, dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_2 = v_1 - 2' \\ F_2 &\equiv v_3 = v_1 - 3' \end{aligned} \tag{1–16}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{1–17}$$

saj imamo opazovanja enake natančnosti, ki so medseboj tudi nekorelirana.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
Če uporabimo enačbi (1–15) in (1–16) in jih upoštevamo pri karakteristični funkciji iz enačbe (1–17) dobimo:

$$\Phi = v_1^2 + (v_1 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + (v_1 + \alpha_1 - \alpha_3)^2 = v_1^2 + (v_1 - 2')^2 + (v_1 - 3')^2 \Rightarrow \min. \tag{1–18}$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopa le še popravek v_1, iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$ iz enačbe (1–18) bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(v_1)$ in ga izenačili z 0.

$$\Phi'(v_1) = \frac{d\Phi}{dv_1} = 2v_1 + 2(v_1 - 2') + 2(v_1 - 3') = 0 \tag{1–19}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
   Ker imamo $n_0 = 1$, pomeni, da smo z odvajanjem v enačbi (1–19) dobili eno enačbo z eno neznanko (v_1). Če enačbo (1–19) preuredimo in rešimo, dobimo:

$$v_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}{3} = \frac{5'}{3} = 1{,}7' \tag{1–20}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
   Uporabimo enačbi (1–15) oziroma (1–16) in dobimo še ostala dva popravka:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - 2' = -0{,}3' \\ v_3 &= v_1 - 3' = -1{,}3' \end{aligned} \tag{1–21}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 32°13{,}7' \tag{1–22}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
    Neznanka, ki jo iščemo je izravnana vrednost A, ki je:

$$A = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 32°13{,}7' \tag{1–23}$$

Na koncu vidimo, da smo za vsa izravnana opazovanja pridobili enako vrednost, temu pogoju morajo izravnana opazovanja tudi zadoščati (glej enačbo (1–12)). Zanima pa nas, kakšne oblike je sploh rešitev, kakšne oblike so izravnana opazovanja in izravnana vrednost kota A. Vemo, da velja $A = \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + v_1$. Če uporabimo za popravek v_1 enačbo (1–20), potem dobimo:

$$A = \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + v_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}{3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} \tag{1–24}$$

Enačba (1–24) prikazuje zelo pomembno lastnost MNK, in sicer, če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, potem je rešitev pri metodi najmanjših kvadratov vedno aritmetična sredina.

1.4.2 Posredna metoda

Rešitev po posredni metodi bomo prikazali po točkah iz poglavja 1.3.2.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

Ta korak je identičen kot 1. korak direktne metode, zato bomo samo zapisali: $n = 3$, $n_0 = 1$ in $r = n - n_0 = 2$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$ sta (glej enačbi (1–10) in (1–11)):

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31°12' \\ 31°14' \\ 31°15' \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = 1 \tag{1–25}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Pri nalogi smo izmerili tri vrednosti neznanega kota A, zato je smiselno nastaviti neznanko ravno kot A.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo torej $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z nezanko. Enačbe popravkov so oblike:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha}_1 = A \\ F_2 &\equiv \hat{\alpha}_2 = A \\ F_3 &\equiv \hat{\alpha}_3 = A \end{aligned} \tag{1–26}$$

   V treh enačbah (1–26) nastopa ena neznanka in tri izravnana opazovanja, torej 4 neznane količine. Tri enačbe in 4 neznanke pomeni, da sistema enačb ne moremo rešiti enolično.

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   Naredimo zamenjavo $\hat{\alpha}_i = \alpha_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 + \alpha_1 = A \\ F_2 &\equiv v_2 + \alpha_2 = A \\ F_3 &\equiv v_3 + \alpha_3 = A \end{aligned} \tag{1–27}$$

   Tudi sedaj ne moremo enolično rešiti enačbe (1–27), saj imamo še vedno neznanko in tri popravke opazovanj.

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.
   Izpostavimo popravke opazovanj v odvisnosti od neznank. Vse kar nastopa na levi strani, razen popravkov, prenesemo na desno stran:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = A - \alpha_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = A - \alpha_2 \\ F_3 &\equiv v_3 = A - \alpha_3 \end{aligned} \tag{1–28}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima enako obliko kot pri direktni metodi, in sicer:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{1–29}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
   V karakteristično funkcijo vnesemo enačbe (1–28), vsak popravek nadomestimo z neznankami:

$$\Phi = (A - \alpha_1)^2 + (A - \alpha_2)^2 + (A - \alpha_3)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–30}$$

   Vidimo, da je tudi tu funkcija Φ odvisna le od enega parametra, to je neznanka A.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(A)$ iz enačbe (1–30) bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(A)$ in ga izenačili z 0.

$$\Phi'(A) = \frac{d\Phi}{dA} = 2(A - \alpha_1) + 2(A - \alpha_2) + 2(A - \alpha_3) = 0 \tag{1–31}$$

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank in dobimo njihove vrednosti.
   Imamo samo eno enačbo, v kateri nastopa ena neznanka, to je enačba (1–31). Rešimo enačbo in poiščemo vrednost neznanke:

$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = 32°13{,}7' \tag{1–32}$$

   Iz enačbe je razvidno, da je ocenjena vrednost neznanke kar aritmetična sredina. Dobili smo torej povsem enak rezultat kot pri direktni metodi.

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz alineje 5.
    Uporabimo enačbe iz alineje 5 in izračunamo popravke:

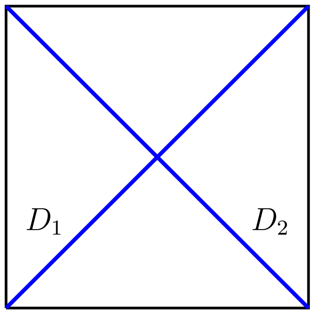
$$\begin{aligned} v_1 &= A - \alpha_1 = 1{,}7' \\ v_2 &= A - \alpha_2 = -0{,}3' \\ v_3 &= A - \alpha_3 = -1{,}3' \end{aligned} \tag{1–33}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 32°13{,}7' \tag{1–34}$$

1.5 Primer 2 - Diagonala kvadrata merjena dvakrat

V kvadratu smo izmerili diagonalo dvakrat, kot prikazuje slika 1–5, in dobili $D_1 = 5{,}2\,\mathrm{m}$ ter $D_2 = 5{,}1\,\mathrm{m}$.



Slika 1–5: Skica kvadrata in opazovanih diagonal v kvadratu

Z direktno in posredno metodo MNK izravnaj opazovanja in izračunaj velikost kvadrata, če:

1. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, in medseboj nekorelirani ter
2. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, in medseboj korelirani, $\rho_{12} = 0.5$.

1.5.1 Direktna metoda

Glede na podatke naloge moramo narediti dva izračuna, prvič, ko sta opazovanji različne natančnosti a nekorelirani (alineja 1), drugič pa, ko sta opazovanji dodatno še korelirani (alineja 2).

Opazovanji sta različne natančnosti in nekorelirani

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da imamo dve opazovanja, torej $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\mathrm{m} \\ 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–35}$$

   Opazovanja so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Kovariančna matrika je velikosti 2×2 in ima obliko: :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–36}$$

   Izberemo si referenčno varianco a-priori σ_0^2, in sicer tako, da bomo imeli v matriki uteži $\mathbf{P}$ najmanjša možna cela števila. Izberemo si torej:

$$\sigma_0^2 = 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \tag{1–37}$$

   Prvo izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–38}$$

V drugem koraku pa še matriko uteži $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = 4 \;\; p_2 = 1 \tag{1–39}$$

Če želimo dobiti velikost kvadrata, potem velja $n_0 = 1$, torej je število nadštevilnih opazovanj $r = n - n_0 = 1$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja (in morebitne konstante). Pogoj, ki velja za naši dve opazovanji, je seveda:
   $$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{1–40}$$
   Pogoj iz enačbe (1–40) uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki je:
   $$F_1 \equiv \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{1–41}$$
   V enačbi (1–41) nastopada dve izravnani opazovanji, zato sistem ni enolično rešljiv.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V enačbo iz (1–41) vstavimo $\hat{D}_i = D_i + v_i$, $(i = 1, 2)$ in dobimo:
   $$F_1 \equiv D_1 + v_1 = D_2 + v_2 \tag{1–42}$$
   Tudi preoblikovani enačbi v (1–42) vsebujeta dve neznane količine, tokrat oba popravka opazovanj.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r = 1$ (ker imamo toliko enačb) popravek v odvisnosti od ostalega $n_0 = 1$ popravka. Glede na enačbo (1–42) bomo izpostavili popravek v_2 v odvisnosti od popravka v_1. Dobimo:
   $$F_1 \equiv v_2 = v_1 + D_1 - D_2 \tag{1–43}$$
   Če v enačbi (1–43) vstavimo vrednosti opazovanih diagonal, dobimo:
   $$F_1 \equiv v_2 = v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m} \tag{1–44}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:
   $$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 \Rightarrow \min. \tag{1–45}$$
   saj imamo opazovanja različne natančnosti, ki pa so medseboj nekorelirana.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi (1–43) in (1–44) ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe (1–39), potem za funkcijo Φ iz enačbe (1–45) dobimo:
   $$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 \left(v_1 + D_1 - D_2\right)^2 = 4v_1^2 + 1\left(v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m}\right)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–46}$$
   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopa le še popravek v_1, iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$ iz enačbe (1–46) bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(v_1)$ in ga izenačili z 0.

$$\Phi'(v_1) = \frac{d\Phi}{dv_1} = 4 \cdot 2 \cdot v_1 + 1 \cdot 2 \cdot (v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m}) = 0 \tag{1–47}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Ker imamo $n_0 = 1$, pomeni, da smo z odvajanjem v enačbi (1–47) dobili eno enačbo z eno neznanko (v_1). Če enačbo (1–47) preuredimo in rešimo, dobimo:

$$v_1 = \frac{D_2 - D_1}{4 + 1} = \frac{-0{,}1\,\mathrm{m}}{5} = -0{,}02\,\mathrm{m} \tag{1–48}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
Uporabimo enačbo (1–43) oziroma (1–44) in dobimo še popravek druge diagonale:

$$v_2 = v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}08\,\mathrm{m} \tag{1–49}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 5{,}18\,\mathrm{m} \tag{1–50}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Velikost kvadrata najlažje podamo tako, da podamo njegovo stranico a. Velja:

$$a = \frac{\hat{D}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{D}_2}{\sqrt{2}} = 3{,}66\,\mathrm{m} \tag{1–51}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- V kakšnem razmerju sta popravka opazovanj (njuni absolutni vrednosti)? V kakšnem razmerju pa sta uteži opazovanj? Ali je kakšna povezava?
Dobili smo popravka velikosti: $v_1 = -0{,}02\,\mathrm{m}$ *in* $v_2 = 0{,}08\,\mathrm{m}$, *kjer velja:* $|v_1| : |v_2| = 1 : 4 = 1/p_1 : 1/p_2$ *V takem razmerju, kot so uteži opazovanj, so potem tudi popravki opazovanj, ampak, večja utež – manjši popravek.*

Opazovanji sta različne natančnosti in korelirani

Korake bomo prikazali na enak način kot v primeru nekoreliranih opazovanj, le da bo manj opisov, ki so podani že zgoraj.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Ne spremenijo se količine: $n = 2$, $n_0 = 1$ in $r = n - n_0 = 1$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajoča kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ pa imata obliko (upoštevajte korelacijo!):

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\mathrm{m} \\ 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01\,\mathrm{m}^2 & 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \\ 0{,}01\,\mathrm{m}^2 & 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–52}$$

Izberemo si referenčno varianco a-priori σ_0^2, in sicer tako, da bomo imeli v matriki uteži $\mathbf{P}$ najmanjša možna cela števila. Izberemo si torej:

$$\sigma_0^2 = 0{,}03\,\mathrm{m}^2 \tag{1–53}$$

Prvo izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \tag{1–54}$$

V drugem koraku pa še matriko uteži $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow\; p_1 = 4 \;\; p_2 = 1 \;\; p_{12} = -1 \tag{1–55}$$

Ker sta opazovanji korelirani, je kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ polna (enačba (1–52)), polna je matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ (enačba (1–54)) in tudi matrika uteži $\mathbf{P}$ (enačba (1–55)).

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Pogojni enačbi sta enaki kot zgoraj (enačba (1–41)):

$$F_1 \equiv \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{1–56}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   Tudi tu dobimo isto kot zgoraj (enačba (1–42))

$$F_1 \equiv D_1 + v_1 = D_2 + v_2 \tag{1–57}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostavimo na enak način kot zgoraj (enačba (1–43)), tudi v numerični obliki (enačba (1–44)):

$$F_1 \equiv v_2 = v_1 + D_1 - D_2 \qquad F_1 \equiv v_2 = v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m} \tag{1–58}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Ker sta opazovanji korelirani, je funkcija Φ oblike:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + 2p_{12}v_1v_2 \Rightarrow \min. \tag{1–59}$$

   Vidimo, da je funkcija Φ v enačbi (1–59) sestavljena iz dveh delov, različnih natančnosti in vpliva korelacije.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi (1–43) in (1–44), upoštevamo uteži opazovanj in korelacijo iz enačbe (1–55), potem za funkcijo Φ iz enačbe (1–59) dobimo:

$$\Phi = 4v_1^2 + 1\,(v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m})^2 + 2(-1)v_1\,(v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m}) \Rightarrow \min. \tag{1–60}$$

   Tudi tu je karakteristična funkcija Φ odvisna le od popravka v_1, le da je za razliko od enačbe (1–46) malo daljša. Iščemo pa najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$ iz enačbe (1–46) bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(v_1)$ in ga izenačili z 0.

$$\Phi'(v_1) = \frac{d\Phi}{dv_1} = 4 \cdot 2 \cdot v_1 + 1 \cdot 2 \cdot (v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m}) + 2(-1)(2v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m}) = 0 \tag{1–61}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
   Rešimo enačbo (1–61) in izračunamo popravek v_1:

$$4v_1 + v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m} - 2v_1 - 0{,}1\,\mathrm{m} = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = 0{,}0\,\mathrm{m} \tag{1–62}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
   Uporabimo enačbo (1–43) oziroma (1–44) in dobimo še popravek druge diagonale:

$$v_2 = v_1 + 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}0\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{m} \tag{1–63}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 5{,}20\,\mathrm{m} \tag{1–64}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
    Velikost kvadrata najlažje podamo tako, da podamo njegovo stranico a. Velja:

$$a = \frac{\hat{D}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{D}_2}{\sqrt{2}} = 3{,}677\,\mathrm{m} \tag{1–65}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Ali je izravnana vrednost dolžine še vedno med obema merjenima vrednostima, kot bi po logiki pričakovali? Ali bi lahko dobili izravnano vrednost izven območja obeh dolžin?
  Kadar so opazovanja korelirana, lahko dobimo numerično vrednosti izravnane količine izven območja merjenih količin.

1.5.2 Posredna metoda

Opazovanji sta različne natančnosti in nekorelirani

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n = 2$, $n_0 = 1$, $r = 1$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\mathrm{m} \\ 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = 4 \;\; p_2 = 1 \tag{1–66}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Za neznanko lahko nastavimo stranico a ali pa diagonalo D. Tu bomo izbrali stranico a, doma pa sami poskusite z diagonalo D.

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 2$ enačbi popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 = \sqrt{2}\,a \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 = \sqrt{2}\,a \end{aligned} \tag{1–67}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv D_1 + v_1 = \sqrt{2}\,a \\ F_2 &\equiv D_2 + v_2 = \sqrt{2}\,a \end{aligned} \tag{1–68}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\,a - D_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\,a - D_2 \end{aligned} \tag{1–69}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo (1–45)):
$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 \Rightarrow \min. \tag{1–70}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbi (1–69):
$$\Phi = 4\,(\sqrt{2}\,a - D_1)^2 + 1\,(\sqrt{2}\,a - D_2)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–71}$$

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Poiščemo odvod enačbe (1–71) in ga izenačimo z 0:
$$\Phi'(a) = \frac{d\Phi}{da} = 4 \cdot 2(\sqrt{2}\,a - D_1) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2(\sqrt{2}\,a - D_2) \cdot \sqrt{2} = 0 \tag{1–72}$$
   (Ne pozabite odvajati tudi znotraj oklepaja, od tod $\sqrt{2}$ na koncu obeh izrazov.)

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4D_1 + 1D_2}{4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 5{,}18\,\mathrm{m} = 3{,}66\,\mathrm{m} \left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_1 D_1 + p_2 D_2}{p_1 + p_2} \right) \tag{1–73}$$
   Tu smo dobili pomemben rezultat, in sicer, če so opazovanja različne natančnosti in medseboj nekorelirana, potem je rešitev pri metodi najmanjših kvadratov vedno utežena sredina. Utežena sredina je prikazana na desni, v oklepajih, drugi ulomek. Prvi ulomek $(1/\sqrt{2})$ predstavlja faktor pretvorbe iz diagonale D v stranico a. Če bi za neznanko namesto stranice a izbrali diagonalo D, tega faktorja ne bi bilo.

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb (1–69).
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\,a - D_1 = -0{,}02\,\mathrm{m} \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\,a - D_2 = 0{,}08\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–74}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 5{,}18\,\mathrm{m} \tag{1–75}$$

Opazovanji sta različne natančnosti in korelirani

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, na koncu pa dobimo $n = 2$, $n_0 = 1$, $r = 1$ in:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\text{m} \\ 5{,}1\,\text{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = 4 \;\; p_2 = 1 \;\; p_{12} = -1 \tag{1–76}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Tudi tu bo neznanka stranica a.

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Nastavimo enaki enačbi kot pri nekoreliranih opazovanjih (enačba (1–67)). Dobimo:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 = \sqrt{2}\,a \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 = \sqrt{2}\,a \end{aligned} \tag{1–77}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   Glej enačbo (1–68):
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv D_1 + v_1 = \sqrt{2}\,a \\ F_2 &\equiv D_2 + v_2 = \sqrt{2}\,a \end{aligned} \tag{1–78}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.
   Glej enačbo (1–69):
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\,a - D_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\,a - D_2 \end{aligned} \tag{1–79}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo (1–59)) in koreliranih opazovanjih:
   $$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + 2p_{12}v_1v_2 \Rightarrow \text{min.} \tag{1–80}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbi (1–69):
   $$\Phi = 4\,(\sqrt{2}\,a - D_1)^2 + 1\,(\sqrt{2}\,a - D_2)^2 + 2(-1)(\sqrt{2}\,a - D_1)(\sqrt{2}\,a - D_2) \Rightarrow \text{min.} \tag{1–81}$$

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Poiščemo odvod enačbe (1–81) in ga izenačimo z 0:
   $$\begin{aligned} \Phi'(a) = \frac{d\Phi}{da} =& 4 \cdot 2(\sqrt{2}\,a - D_1) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2(\sqrt{2}\,a - D_2) \cdot \sqrt{2} - \\ & - 2(\sqrt{2}(\sqrt{2}\,a - D_2) + (\sqrt{2}\,a - D_1)\sqrt{2}) = 0 \end{aligned} \tag{1–82}$$

   (Ne pozabite odvajati tudi znotraj oklepaja, od tod $\sqrt{2}$ na koncu obeh izrazov. Tretji člen odvajajte kot produkt dveh funkcij.)

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} D_1 = 3{,}677\,\mathrm{m} \tag{1–83}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb (1–69).

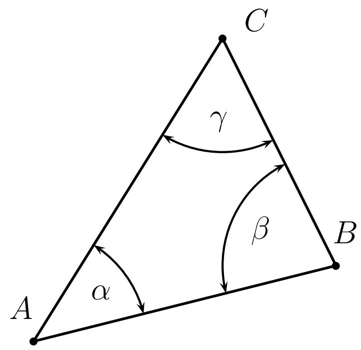
$$\begin{aligned} F_1 \equiv v_1 &= \sqrt{2}\,a - D_1 = 0{,}00\,\mathrm{m} \\ F_2 \equiv v_2 &= \sqrt{2}\,a - D_2 = 0{,}10\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–84}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 5{,}20\,\mathrm{m} \tag{1–85}$$

1.6 Primer 3 - Merjeni vsi koti trikotnika

V trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote in dobili: $\alpha = 41°33'$, $\beta = 78°57'$ in $\gamma = 59°27'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1–6: Skica trikotnika in vseh notranjih kotov

1.6.1 Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 3$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41°33' \\ 78°57' \\ 59°27' \end{bmatrix} \tag{1–86}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži velikosti 3×3 in enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \; p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = 1 \quad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} = p_{\beta\gamma} = 0 \tag{1–87}$$

   Minimalno število opazovanj je $n_0 = 2$, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 = 1$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja in konstanta (katera je tu konstanta?). Pogoj, ki velja za naša opazovanja, je seveda:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180° \tag{1–88}$$

   Pogoj iz enačbe (1–88) uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki je:

$$F_1 \equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180° \tag{1–89}$$

   Sedaj že vemo, da je v enačbi (1–89) preveč neznanih količin, zato enačba ni enolično rešljiva.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
V enačbo iz (1–89) vstavimo $\hat{i} = i + v_i$, $(i = \alpha, \beta, \gamma)$ in dobimo:

$$F_1 \equiv \alpha + v_\alpha + \beta + v_\beta + \gamma + v_\gamma = 180^\circ \tag{1–90}$$

Tudi preoblikovani enačbi v (1–90) vsebujeta preveč neznanih količin za enolično rešitev.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
Izpostaviti moramo $r = 1$ (ker imamo toliko enačb) popravek v odvisnosti od ostalih $n_0 = 2$ popravkov. Glede na enačbo (1–90) bomo izpostavili popravek v_γ v odvisnosti od popravkov v_α in v_β. Dobimo:

$$F_1 \equiv v_\gamma = 180^\circ - \alpha - v_\alpha - \beta - v_\beta - \gamma \tag{1–91}$$

Če v enačbo (1–91) vstavimo vrednosti opazovanih kotov, dobimo:

$$F_1 \equiv v_\gamma = 3{,}0' - v_\alpha - v_\beta \tag{1–92}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \tag{1–93}$$

Uteži opazovanj dobimo iz enačbe (1–87).

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
Če uporabimo enačbi (1–91) in (1–92) ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe (1–87), potem za funkcijo Φ iz enačbe (1–93) dobimo:

$$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma (3{,}0' - v_\alpha - v_\beta)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–94}$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata dva popravka, v_α in v_β. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_\alpha, v_\beta)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_\alpha, v_\beta)$ iz enačbe (1–94) bomo dobili tako, da bomo poiskali oba parcialna odvoda, $\partial\Phi/\partial v_\alpha$ in $\partial\Phi/\partial v_\beta$, in ju izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial v_\alpha} &= 2p_\alpha v_\alpha + 2p_\gamma (3{,}0' - v_\alpha - v_\beta)(-1) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_\beta} &= 2p_\beta v_\beta + 2p_\gamma (3{,}0' - v_\alpha - v_\beta)(-1) = 0 \end{aligned} \tag{1–95}$$

V enačbi (1–95) smo dobili dve enačbi z dvema neznanima količinama, popravkoma v_α in v_β.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Enačbi (1–95) preuredimo, da dobimo dve enačbi z dvema neznankama, in sicer:

$$\begin{aligned} 2.0 v_\alpha + 1.0 v_\beta &= 3{,}0' \\ 1.0 v_\alpha + 2.0 v_\beta &= 3{,}0' \end{aligned} \tag{1–96}$$

Rešimo enačbi (1–96) in dobimo:

$$v_\alpha = 1{,}0' \qquad v_\beta = 1{,}0' \tag{1–97}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
   Uporabimo enačbo (1–91) oziroma (1–92) in dobimo še popravek tretjega kota:

$$v_\gamma = 3{,}0' - v_\alpha - v_\beta = 1{,}0' \tag{1–98}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{\alpha} = 41°34{,}0' \qquad \hat{\beta} = 78°58{,}0' \qquad \hat{\gamma} = 59°28{,}0' \tag{1–99}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
    Ni neznank pri tej nalogi.

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Kako v tem primeru vidimo "aritmetnično sredino" rezultatov? Namig: kako se razdeli odstopanje pogojne enačbe na popravke...

1.6.2 Posredna metoda

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode (glej tam alinejo 1), na koncu pa dobimo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:

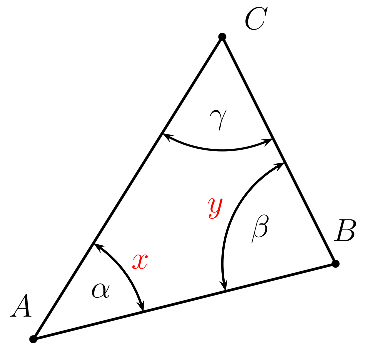
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41°33' \\ 78°57' \\ 59°27' \end{bmatrix} \tag{1–100}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = 1 \quad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} = p_{\beta\gamma} = 0 \tag{1–101}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Izbrali bomo dva neznana kota, kot prikazuje slika 1–7, neznanki pa označili z x in y. Neznanka x predstavlja kot α, medtem kot neznanka y kot β.

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} = x \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} = y \\ F_3 &\equiv \hat{\gamma} = 180° - x - y \end{aligned} \tag{1–102}$$



Slika 1–7: Izbira neznank v trikotniku, ko merimo notranje kote

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha + v_\alpha = x \\ F_2 &\equiv \beta + v_\beta = y \\ F_3 &\equiv \gamma + v_\gamma = 180^\circ - x - y \end{aligned} \tag{1–103}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_\alpha = x - \alpha \\ F_2 &\equiv v_\beta = y - \beta \\ F_3 &\equiv v_\gamma = 180^\circ - x - y - \gamma \end{aligned} \tag{1–104}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo (1–93)), uteži dobimo iz enačbe (1–87):

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \tag{1–105}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbe (1–104):

$$\Phi = p_\alpha (x-\alpha)^2 + p_\beta (y-\beta)^2 + p_\gamma (180^\circ - x - y - \gamma)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–106}$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata dve neznanki, x in y. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y)$ iz enačbe (1–106) bomo dobili tako, da bomo poiskali oba parcialna odvoda, $\partial\Phi/\partial x$ in $\partial\Phi/\partial x$, in ju izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} =& 2p_\alpha(x-\alpha) + 2p_\gamma(180^\circ - x - y - \gamma)(-1) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} =& 2p_\beta(y-\beta) + 2p_\gamma(180^\circ - x - y - \gamma)(-1) = 0 \end{aligned} \tag{1–107}$$

V enačbi (1–107) smo dobili dve enačbi z dvema neznankama, x in y.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank. Enačbi (1–107) preuredimo in dobimo:

$$\begin{aligned} 2.0x + 1.0y &= 162°6{,}0' \\ 1.0x + 2.0y &= 199°30{,}0' \end{aligned} \tag{1–108}$$

Rešimo enačbi (1–108) in dobimo vrednosti obeh neznank:

$$x = 41°34{,}0' \qquad y = 78°58{,}0' \tag{1–109}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb (1–104).

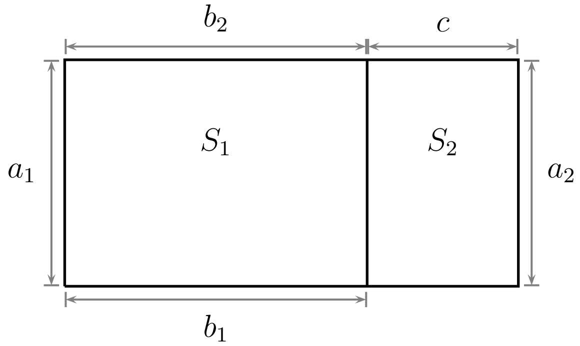
$$\begin{aligned} F_1 \equiv v_\alpha &= x - \alpha = 1{,}0' \\ F_2 \equiv v_\beta &= y - \beta = 1{,}0' \\ F_3 \equiv v_\gamma &= 180° - x - y - \gamma = 1{,}0' \end{aligned} \tag{1–110}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\hat{\alpha} = 41°34{,}0' \qquad \hat{\beta} = 78°58{,}0' \qquad \hat{\gamma} = 59°28{,}0' \tag{1–111}$$

1.7 Primer 4 - Parcela, sestavljena iz dveh pravokotnikov

Parcela je sestavljena iz dveh delov, kot prikazuje slika 1–8. Da bi določili površini obeh delov (S_1 in S_2) smo izmerili 5 stranic, in sicer: $a_1 = 35{,}0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{a_1} = 0{,}1\,\mathrm{m}$), $a_2 = 35{,}1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{a_2} = 0{,}2\,\mathrm{m}$), $b_1 = 20{,}0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{b_1} = 0{,}2\,\mathrm{m}$), $b_2 = 19{,}8\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{b_2} = 0{,}1\,\mathrm{m}$) in $c = 10{,}0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_c = 0{,}1\,\mathrm{m}$). Z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in določi površini S_1 in S_2.



Slika 1–8: Skica obeh delov parcele in opazovane stranice parcel

1.7.1 Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 5$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35{,}0\,\mathrm{m} \\ 35{,}1\,\mathrm{m} \\ 20{,}0\,\mathrm{m} \\ 19{,}8\,\mathrm{m} \\ 10{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–112}$$
   Opazovanja so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Prvo sestavimo matriko $\mathbf{\Sigma}$, izberemo referenčno varianco σ_0^2, izračunamo matriko $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$. Da dobimo matriko uteži, ki ima samo cela števila (najmanjša možna), moramo za referenčno varianco a-priori izbrati $\sigma_0^2 = 0{,}04\,\mathrm{m}^2$. Matrika uteži je velikosti 5×5, na koncu pa so uteži opazovanj enake:
$$p_{a_1} = 4.0 \quad p_{a_2} = 1.0 \quad p_{b_1} = 1.0 \quad p_{b_2} = 4.0 \quad p_c = 4.0 \tag{1–113}$$
   Minimalno število opazovanj je $n_0 = 3$, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 = 2$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 2$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Pogojni enačbi imata obliko:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}_1 = \hat{a}_2 \\ F_2 &\equiv \hat{b}_1 = \hat{b}_2 \end{aligned} \tag{1–114}$$
   Vidimo, da nobena enačba iz (1–114) ne vsebuje opazovanja $\hat{c}$. V pravilih za sestavo pogojnih enačb (glej poglavje 1.3.1) je v drugi alineji zapisano, da moramo v vseh pogojnih enačbah

uporabiti vsa opazovanja. Obstajajo pa izjeme, kot v tem primeru. Če v geometriji problema določeno količino (kot je pri tem primeru stranica c) opazujemo tako, da ni nadštevilno izmerjena, potem tega opazovanja ne moremo vključiti v pogojne enačbe.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V pogojne enačbe (1–114) vstavimo $\hat{i} = i + v_i$, $(i = a_1, a_2, b_1, b_2)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1 + v_{a_1} = a_2 + v_{a_2} \\ F_2 &\equiv b_1 + v_{b_1} = b_2 + v_{b_2} \end{aligned} \tag{1–115}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r = 2$ popravka v odvisnosti od ostalih popravkov, ki še nastopajo v pogojnih enačbah. Zapišemo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_2} = v_{a_1} + a_1 - a_2 \\ F_2 &\equiv v_{b_2} = v_{b_1} + b_1 - b_2 \end{aligned} \tag{1–116}$$

   Če v enačbi (1–116) vstavimo vrednosti opazovanih stranic, dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_2} = v_{a_1} + (-0{,}1\,\mathrm{m}) \\ F_2 &\equiv v_{b_2} = v_{b_1} + (0{,}2\,\mathrm{m}) \end{aligned} \tag{1–117}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_{a_1}v_{a_1}^2 + p_{a_2}v_{a_2}^2 + p_{b_1}v_{b_1}^2 + p_{b_2}v_{b_2}^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \tag{1–118}$$

   Uteži opazovanj dobimo iz enačbe (1–113), vidimo pa, da v enačbi (1–118) nastopa tudi popravek v_c, ne glede na to, da opazovanje c v pogojnih enačbah ne nastopa.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi (1–116) in (1–117) ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe (1–113), potem za funkcijo Φ iz enačbe (1–118) dobimo:

$$\Phi = p_{a_1}v_{a_1}^2 + p_{a_2}(v_{a_1} + (-0{,}1\,\mathrm{m}))^2 + p_{b_1}v_{b_1}^2 + p_{b_2}(v_{b_1} + (0{,}2\,\mathrm{m}))^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \tag{1–119}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopajo trije popravki, v_{a_1}, v_{b_1} in v_c. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_{a_1}, v_{b_1}, v_c)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_{a_1}, v_{b_1}, v_c)$ iz enačbe (1–119) bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode po vseh popravkih in jih izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial v_{a_1}} &= 2p_{a_1}v_{a_1} + 2p_{a_2}(v_{a_1} + (-0{,}1\,\mathrm{m})) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_{b_1}} &= 2p_{b_1}v_{b_1} + 2p_{b_2}(v_{b_1} + (0{,}2\,\mathrm{m})) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_c} &= 2p_c v_c = 0 \end{aligned} \tag{1–120}$$

   V enačbi (1–120) smo dobili tri enačbe s tremi neznanimi popravki, v_{a_1}, v_{b_1} in v_c.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Iz enačb (1–120) vidimo, da v vsaki enačbi nastopa le en popravek, zato lahko popravke neposredno izračunamo. Dobimo:
$$\begin{aligned} v_{a_1} &= 0{,}02\,\mathrm{m} \\ v_{b_1} &= -0{,}16\,\mathrm{m} \\ v_c &= 0{,}00\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–121}$$
Popravek v_c smo lahko dobili neposredno (glej zadnjo enačbo (1–120)). Rezultat je pravilen in logičen, saj stranica c ni nadštevilno izmerjena.

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
Uporabimo enačbi (1–116) oziroma (1–117) in dobimo vse ostale popravke:
$$\begin{aligned} v_{a_2} &= -0{,}08\,\mathrm{m} \\ v_{b_2} &= 0{,}04\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–122}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:
$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= 35{,}02\,\mathrm{m} \quad & \hat{a}_2 &= 35{,}02\,\mathrm{m} \\ \hat{b}_1 &= 19{,}84\,\mathrm{m} \quad & \hat{b}_2 &= 19{,}84\,\mathrm{m} \\ \hat{c} &= 10{,}00\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–123}$$

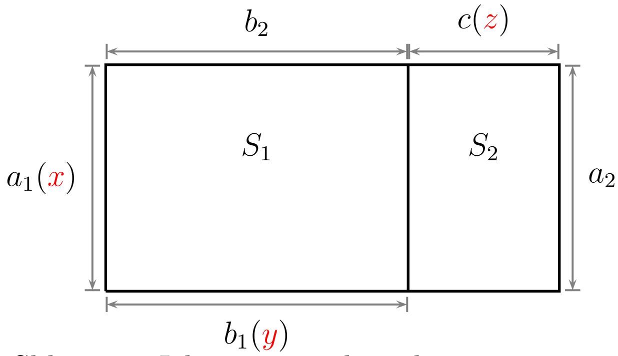
11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Naloga zahteva izračun obeh delov površin S_1 in S_2. Pri izravnanih opazovanjih je vseeno, katero kombinacijo opazovanj uporabimo, vedno dobimo iste rezultate (izravnana opazovanja so skladna). Dobimo:
$$\begin{aligned} S_1 &= \hat{a}_1\hat{b}_1 = \hat{a}_1\hat{b}_2 = \hat{a}_2\hat{b}_1 = \hat{a}_2\hat{b}_2 = 694{,}7968\,\mathrm{m}^2 \\ S_2 &= \hat{a}_1\hat{c} = \hat{a}_2\hat{c} = 350{,}2000\,\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{1–124}$$

1.7.2 Posredna metoda

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode (glej tam alinejo 1), na koncu pa dobimo $n = 5$, $n_0 = 3$, $r = 2$ in:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35{,}0\,\mathrm{m} \\ 35{,}1\,\mathrm{m} \\ 20{,}0\,\mathrm{m} \\ 19{,}8\,\mathrm{m} \\ 10{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–125}$$
$$p_{a_1} = 4.0 \quad p_{a_2} = 1.0 \quad p_{b_1} = 1.0 \quad p_{b_2} = 4.0 \quad p_c = 4.0 \tag{1–126}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = 3$. Izbrali bomo tri stranice, kot prikazuje slika 1–9, neznanke pa označili z x, y in z. Neznanka x predstavlja stranici a, y stranici b in z stranico c.



Slika 1–9: Izbira neznank v obravnavani parceli

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 5$ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}_1 = x \\ F_2 &\equiv \hat{a}_2 = x \\ F_3 &\equiv \hat{b}_1 = y \\ F_4 &\equiv \hat{b}_2 = y \\ F_5 &\equiv \hat{c} = z \end{aligned} \tag{1–127}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1 + v_{a_1} = x \\ F_2 &\equiv a_2 + v_{a_2} = x \\ F_3 &\equiv b_1 + v_{b_1} = y \\ F_4 &\equiv b_2 + v_{b_2} = y \\ F_5 &\equiv c + v_c = z \end{aligned} \tag{1–128}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_1} = x - a_1 \\ F_2 &\equiv v_{a_2} = x - a_2 \\ F_3 &\equiv v_{b_1} = y - b_1 \\ F_4 &\equiv v_{b_2} = y - b_2 \\ F_5 &\equiv v_c = z - c \end{aligned} \tag{1–129}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo (1–118)), uteži dobimo iz enačbe (1–113):

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_{a_1}v_{a_1}^2 + p_{a_2}v_{a_2}^2 + p_{b_1}v_{b_1}^2 + p_{b_2}v_{b_2}^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \tag{1–130}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
   Uporabimo funkcijo Φ in enačbe (1–129):

$$\Phi = p_{a_1}(x-a_1)^2 + p_{a_2}(x-a_2)^2 + p_{b_1}(y-b_1)^2 + p_{b_2}(y-b_2)^2 + p_c(z-c)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–131}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopajo tri neznanke, x, y in z. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y, z)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y, z)$ iz enačbe (1–131) bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode funkcije $\Phi(x, y, z)$ po vseh treh neznankah (in jih izenačili z 0).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2p_{a_1}(x-a_1) + 2p_{a_2}(x-a_2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2p_{b_1}(y-b_1) + 2p_{b_2}(y-b_2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2p_c(z-c) = 0 \end{aligned} \tag{1–132}$$

   V enačbi (1–132) smo dobili tri enačbe s tremi neznankami.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank. Enačbe (1–132) preuredimo in izračunamo neznanke. Tudi tu je v vsaki enačbi le ena neznanka, zato jih rešimo neposredno:

$$\begin{aligned} x &= 35{,}02\,\mathrm{m} \\ y &= 19{,}84\,\mathrm{m} \\ z &= 10{,}00\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–133}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb (1–129).

$$\begin{aligned} v_{a_1} &= x - a_1 = 0{,}02\,\mathrm{m} \\ v_{a_2} &= x - a_2 = -0{,}08\,\mathrm{m} \\ v_{b_1} &= y - b_1 = -0{,}16\,\mathrm{m} \\ v_{b_2} &= y - b_2 = 0{,}04\,\mathrm{m} \\ v_c &= z - c = 0{,}00\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–134}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

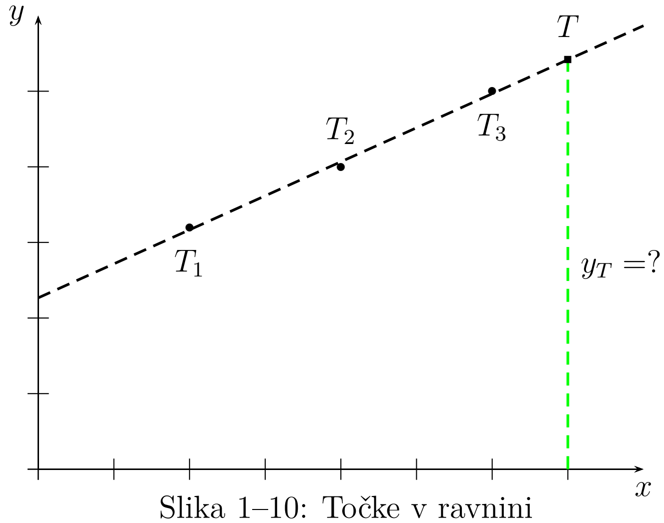
$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= 35{,}02\,\mathrm{m} & \hat{a}_2 &= 35{,}02\,\mathrm{m} \\ \hat{b}_1 &= 19{,}84\,\mathrm{m} & \hat{b}_2 &= 19{,}84\,\mathrm{m} \\ \hat{c} &= 10{,}00\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–135}$$

Na koncu izračunamo še površini obeh delov parcel. Uporabili bomo neznanke iz enačbe (1–133):

$$\begin{aligned} S_1 &= x\,y = 694{,}7968\,\mathrm{m}^2 \\ S_2 &= x\,z = 350{,}2000\,\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{1–136}$$

1.8 Primer 5 - Premica v ravnini

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate x, koordinate y pa so opazovane, $T_1(x_1, y_1) = (2.0, 3.2)$, $T_2(x_2, y_2) = (4.0, 4.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (6.0, 5.0)$, kot prikazuje slika 1–10. Z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj koordinato y_T za točko T, ki ima $x_T = 7.0$.



Slika 1–10: Točke v ravnini

1.8.1 Direktna metoda

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 3$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–137}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana. Matrika uteži je velikosti 3×3, uteži opazovanj pa so na koncu enake:

$$p_1 = 1.0 \quad p_2 = 1.0 \quad p_3 = 1.0 \tag{1–138}$$

   Minimalno število opazovanj je $n_0 = 2$, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 = 1$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Kako dobiti pogoj, katerega morajo točke izpolnjevati pri premici? Če izračunamo naklonski koeficient iz točk T_1 in T_2, mora biti ta enak naklonskemu koeficientu iz točk T_2 in T_3. Pogoj ima obliko:

$$\frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} \quad \rightarrow \quad \hat{y}_2 - \hat{y}_1 = \hat{y}_3 - \hat{y}_2 \tag{1–139}$$

   Če sedaj pogoj iz enačbe (1–139) preuredimo, sestavimo pogojno enačbo:

$$F_1 \equiv \hat{y}_1 - 2\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0 \tag{1–140}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V pogojne enačbe (1–140) vstavimo $\hat{y}_i = y_i + v_i$, $(i = 1, 2, 3)$ in dobimo:

$$F_1 \equiv y_1 + v_1 - 2(y_2 + v_2) + y_3 + v_3 = 0 \tag{1–141}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r = 1$ popravkov v odvisnosti od ostalih popravkov, ki nastopajo v pogojni enačbi Zapišemo:

$$F_1 \equiv v_3 = -y_1 - v_1 + 2(y_2 + v_2) - y_3 \tag{1–142}$$

   Če v enačbi (1–142) vstavimo vrednosti opazovanih koordinat y, dobimo:

$$F_1 \equiv v_3 = 2v_2 - v_1 - 0.2 \tag{1–143}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{1–144}$$

   Uteži opazovanj dobimo iz enačbe (1–138).

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi (1–142) in (1–143) ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe (1–138), potem za funkcijo Φ iz enačbe (1–144) dobimo:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3(2v_2 - v_1 - 0.2)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–145}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata samo še dva popravka, v_1 in v_2. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1, v_2)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1, v_2)$ iz enačbe (1–145) bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode po obeh popravkih in jih izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} &= 2p_1 v_1 + 2p_3(2v_2 - v_1 - 0.2)(-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} &= 2p_2 v_2 + 2p_3(2v_2 - v_1 - 0.2)2 = 0 \end{aligned} \tag{1–146}$$

   V enačbi (1–146) smo dobili dve enačbi z dvema neznanima popravkoma, v_1 in v_2.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
   Enačbi (1–146) prvo delimo z 2, potem pa preuredimo, da dobimo dve enačbi z dvema neznankama, in sicer:

$$2.0v_1 - 2.0v_2 = -0.20 \tag{1–147}$$

$$-2.0v_1 + 5.0v_2 = 0.40 \tag{1–148}$$

   Rešimo enačbi (1–148) in dobimo:

$$v_1 = -0.033 \qquad v_2 = 0.067 \tag{1–149}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
   Uporabimo enačbi (1–142) oziroma (1–143) in dobimo vse ostale popravke:

$$v_3 = -0.033 \tag{1–150}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{y}_1 = 3.167 \qquad \hat{y}_2 = 4.067 \qquad \hat{y}_3 = 4.967 \tag{1–151}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
   Prvo moramo izračunati enačbo premice, ki se optimalno prilega točkam. Izračunamo koeficient a in prosti člen b, uporabimo pa izravnana opazovanja iz enačbe (1–151). Dobimo:

$$a = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = 0.450 \qquad b = \hat{y}_1 - ax_1 = 2.2667 \tag{1–152}$$

   Sedaj uporabimo koeficiente premice iz enačbe (1–152), da izračunamo y_T točke T, pri koordinati $x_T = 7.0$:

$$y_T = a\,x_T + b = 5.417 \tag{1–153}$$

1.8.2 Posredna metoda

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Prvi korak je enak koraku 1 direktne metode, dobimo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–154}$$

$$p_1 = 1.0 \quad p_2 = 1.0 \quad p_3 = 1.0 \tag{1–155}$$

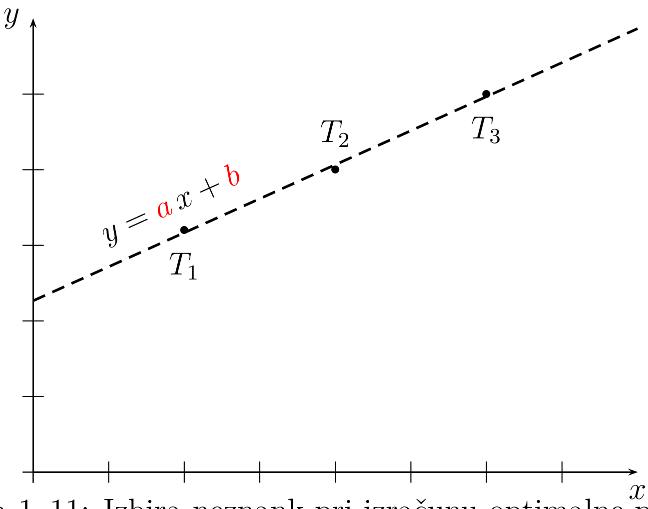
2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = 2$. Ker naloga zahteva izračun premice, ki se optimalno prilega točkam, je najbolj smiselno nastaviti parametra premice, to sta naklonski koeficient a in prosti člen b.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 = a\,x_1 + b \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 = a\,x_2 + b \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 = a\,x_3 + b \end{aligned} \tag{1–156}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv y_1 + v_1 = a\,x_1 + b \\ F_2 &\equiv y_2 + v_2 = a\,x_2 + b \\ F_3 &\equiv y_3 + v_3 = a\,x_3 + b \end{aligned} \tag{1–157}$$



Slika 1–11: Izbira neznank pri izračunu optimalne premice

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv v_1 = a\,x_1 + b - y_1 \\
F_2 &\equiv v_2 = a\,x_2 + b - y_2 \\
F_3 &\equiv v_3 = a\,x_3 + b - y_3
\end{aligned}
\tag{1–158}
$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo (1–144)), uteži dobimo iz enačbe (1–138):

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{1–159}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
Uporabimo funkcijo Φ in enačbe (1–158):

$$\Phi = p_1(a\,x_1 + b - y_1)^2 + p_2(a\,x_2 + b - y_2)^2 + p_3(a\,x_3 + b - y_3)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–160}$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata obe neznanki, a in b. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(a, b)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(a, b)$ iz enačbe (1–160) bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode funkcije $\Phi(a, b)$ po obeh neznankah (in jih izenačili z 0).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial a} =& 2p_1(a\,x_1 + b - y_1)x_1 + 2p_2(a\,x_2 + b - y_2)x_2 + 2p_3(a\,x_3 + b - y_3)x_3 = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial b} =& 2p_1(a\,x_1 + b - y_1) + 2p_2(a\,x_2 + b - y_2) + 2p_3(a\,x_3 + b - y_3) = 0
\end{aligned}
\tag{1–161}
$$

V enačbi (1–161) smo dobili dve enačbi z dvema neznankama.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank. Enačbe (1–161) najprej delimo z 2, nato pa jih preuredimo, da dobimo:

$$
\begin{aligned}
56.0\,a + 12.0\,b &= 52.40 \\
12.0\,a + 3.0\,b &= 12.20
\end{aligned}
\tag{1–162}
$$

Rešimo enačbi (1–162) in dobimo vrednosti obeh neznank, a in b:

$$a = 0.450 \qquad b = 2.2667 \tag{1–163}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb (1–158).

$$\begin{aligned} v_1 &= a\,x_1 + b - y_1 = -0{,}033\,\mathrm{m} \\ v_2 &= a\,x_2 + b - y_2 = 0{,}067\,\mathrm{m} \\ v_3 &= a\,x_3 + b - y_3 = -0{,}033\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–164}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

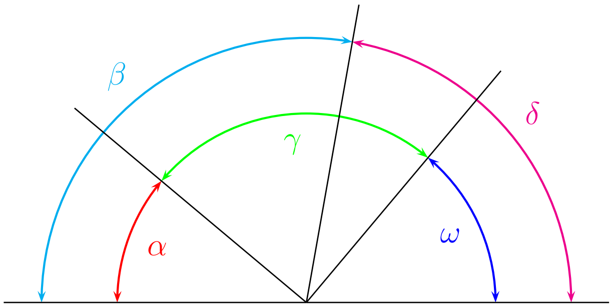
$$\hat{y}_1 = 3.167 \qquad \hat{y}_2 = 4.067 \qquad \hat{y}_3 = 4.967 \tag{1–165}$$

Za izračun y_T točke T, kjer je $x_T = 7.0$, uporabimo ocenjene neznanke iz (1–163) in dobimo:

$$y_T = a\,x_T + b = 5.417 \tag{1–166}$$

1.9 Primer 6 - Izmerjeni koti

Merili smo kote, kot prikazuje slika 1–12. Vrednosti kotov so: $\alpha = 60{,}0°$, $\beta = 95{,}0°$, $\gamma = 90{,}0°$, $\delta = 80{,}0°$ in $\omega = 35{,}0°$. S posredno in direktno metodo izravnajte kote, če so vsi opazovani z enako natančnostjo in so medseboj nekorelirani.



Slika 1–12: Shema izmerjenih kotov

1.9.1 Direktna metoda

Izravnava po direktni metodi sledi vsem korakom, ki so prikazani v poglavju 1.3, kakor tudi v vseh do sedaj rešenih nalogah. Zato v tem dokumentu ne bomo podajali podrobnih navodil, ampak samo nastavitev naloge.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Število opazovanj $n = 5$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60{,}0° \\ 95{,}0° \\ 90{,}0° \\ 80{,}0° \\ 35{,}0° \end{bmatrix} \tag{1–167}$$
   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, torej velja:
   $$p_\alpha = 1.0 \quad p_\beta = 1.0 \quad p_\gamma = 1.0 \quad p_\delta = 1.0 \quad p_\omega = 1.0 \tag{1–168}$$
   Določiti je potrebno minimalno število opazovanj za izračun naloge, ki je $n_0 = 3$. Število nadštevilnih opazovanj je potem $r = 2$. Kako ugotoviti, koliko je n_0? S slike 1–12 je vidno, da imamo horizontalno linijo, ki dejansko predstavlja iztegnjen kot (180°). Vprašanje pa je, koliko kotov moramo izmeriti, da bodo vse tri smeri (navzgor) določene enolično... Ali je odgovor na dlani?
   Ugotovimo lahko, da bi potrebovali tri medseboj neodvisne kote (npr. α, β in γ, ali pa ω, γ in δ, če zapišemo samo dve možni različici), torej $n_0 = 3$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je $r = 2$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja in kontante.

Kako dobiti pogoje, katere morajo koti izpolnjevati? Vidimo, da se merjeni koti med seboj prekrivajo, nekateri pa skupaj tvorijo iztegnjeni kot.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\omega} = 180^\circ \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} + \hat{\delta} = 180^\circ \end{aligned} \tag{1–169}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha + v_\alpha + \gamma + v_\gamma + \omega + v_\omega = 180^\circ \\ F_2 &\equiv \beta + v_\beta + \delta + v_\delta = 180^\circ \end{aligned} \tag{1–170}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_\omega = 180^\circ - v_\alpha - v_\gamma + (\alpha + \gamma + \omega) = -5{,}0^\circ - v_\alpha - v_\gamma \\ F_2 &\equiv v_\delta = 180^\circ - v_\beta - (\beta + \delta) = 5{,}0^\circ - v_\beta \end{aligned} \tag{1–171}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.

$$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 + p_\delta v_\delta^2 + p_\omega v_\omega^2 \Rightarrow \min. \tag{1–172}$$

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.

$$\Phi = 1.0 v_\alpha^2 + 1.0 v_\beta^2 + 1.0 v_\gamma^2 + 1.0(5{,}0^\circ - v_\beta)^2 + 1.0(-5{,}0^\circ - v_\alpha - v_\gamma)^2 \Rightarrow \min. \tag{1–173}$$

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_\alpha} &= 2 \cdot 1.0 v_\alpha + 2 \cdot 1.0(-5{,}0^\circ - v_\alpha - v_\gamma)(-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_\beta} &= 2 \cdot 1.0 v_\beta + 2 \cdot 1.0(5{,}0^\circ - v_\beta)(-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_\gamma} &= 2 \cdot 1.0 v_\gamma + 2 \cdot 1.0(-5{,}0^\circ - v_\alpha - v_\gamma)(-1) = 0 \end{aligned} \tag{1–174}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.

$$\begin{aligned} 2.0 v_\alpha + 0.0 v_\beta + 1.0 v_\gamma &= -5{,}00^\circ \\ 1.0 v_\alpha + 0.0 v_\beta + 2.0 v_\gamma &= -5{,}00^\circ \\ 0.0 v_\alpha + 2.0 v_\beta + 0.0 v_\gamma &= 5{,}00^\circ \end{aligned} \tag{1–175}$$

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -1{,}667^\circ \\ v_\beta &= 2{,}500^\circ \\ v_\gamma &= -1{,}667^\circ \end{aligned} \tag{1–176}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.

$$\begin{aligned} v_\delta &= 5{,}0^\circ - v_\beta = 2{,}500^\circ \\ v_\omega &= -5{,}0^\circ - v_\alpha - v_\gamma = -1{,}667^\circ \end{aligned} \tag{1–177}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 58{,}333^\circ\\ \hat{\beta} &= 97{,}500^\circ\\ \hat{\gamma} &= 88{,}333^\circ\\ \hat{\delta} &= 82{,}500^\circ\\ \hat{\omega} &= 33{,}333^\circ\end{aligned} \tag{1–178}$$

1.9.2 Posredna metoda

Tudi v primeri posredne metode bomo pokazali samo nastavek naloge.

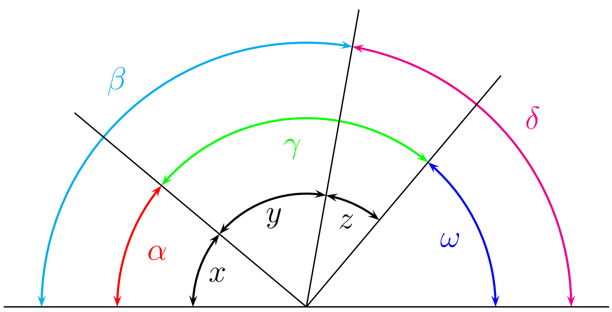
1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Število opazovanj $n = 5$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}60{,}0^\circ\\ 95{,}0^\circ\\ 90{,}0^\circ\\ 80{,}0^\circ\\ 35{,}0^\circ\end{bmatrix} \tag{1–179}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, torej velja:

$$p_\alpha = 1.0 \quad p_\beta = 1.0 \quad p_\gamma = 1.0 \quad p_\delta = 1.0 \quad p_\omega = 1.0 \tag{1–180}$$

   Minimalno število opazovanj za izračun naloge je $n_0 = 3$, število nadštevilnih opazovanj je $r = 2$.



Slika 1–13: Uvedene neznanke v funkcionalni model

   Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = 3$. Kaj nastaviti za neznanke? S katerimi koti bi popolnoma opisali geometrijo problema? Izbiro neznank prikazuje slika 1–13, kjer smo neznanke označili z x, y in z. Vidimo, da si izberemo prve tri kote, ki pa niso nujno direktno merjeni (kota y in z).

2. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Vsa opazovanja povežemo z neznankami: vsako opazovanje ena enačba popravkov.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} = x \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} = x + y \\ F_2 &\equiv \hat{\gamma} = y + z \\ F_2 &\equiv \hat{\delta} = 180° - x - y \\ F_3 &\equiv \hat{\omega} = 180° - x - y - z \end{aligned} \tag{1–181}$$

3. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha + v_\alpha = x \\ F_2 &\equiv \beta + v_\beta = x + y \\ F_2 &\equiv \gamma + v_\gamma = y + z \\ F_2 &\equiv \delta + v_\delta = 180° - x - y \\ F_3 &\equiv \omega + v_\omega = 180° - x - y - z \end{aligned} \tag{1–182}$$

4. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_\alpha = x - \alpha = x - 60.0° \\ F_2 &\equiv v_\beta = x + y - \beta = x + y - 95.0° \\ F_2 &\equiv v_\gamma = y + z - \gamma = y + z - 90.0° \\ F_2 &\equiv v_\delta = -x - y + 180° - \delta = -x - y + 100.0° \\ F_3 &\equiv v_\omega = -x - y - z + 180° - \omega = -x - y - z + 145.0° \end{aligned} \tag{1–183}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.

$$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 + p_\delta v_\delta^2 + p_\omega v_\omega^2 \Rightarrow \min. \tag{1–184}$$

6. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.

$$\begin{aligned} \Phi =& 1.0(x - 60.0°)^2 + 1.0(x + y - 95.0°)^2 + 1.0(y + z - 90.0°)^2 + \\ &+ 1.0(-x - y + 100.0°)^2 + \\ &+ 1.0(-x - y - z + 145.0°)^2 \Rightarrow \min. \end{aligned} \tag{1–185}$$

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} =& 4.0v_\alpha + 3.0v_\beta + 1.0v_\gamma &= 400{,}00° \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} =& 3.0v_\alpha + 4.0v_\beta + 2.0v_\gamma &= 430{,}00° \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} =& 1.0v_\alpha + 2.0v_\beta + 2.0v_\gamma &= 235{,}00° \end{aligned} \tag{1–186}$$

8. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

$$\begin{aligned} x &= 58{,}333° \\ y &= 39{,}167° \\ z &= 49{,}167° \end{aligned} \tag{1–187}$$

9. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi sestavljenih enačb popravkov.

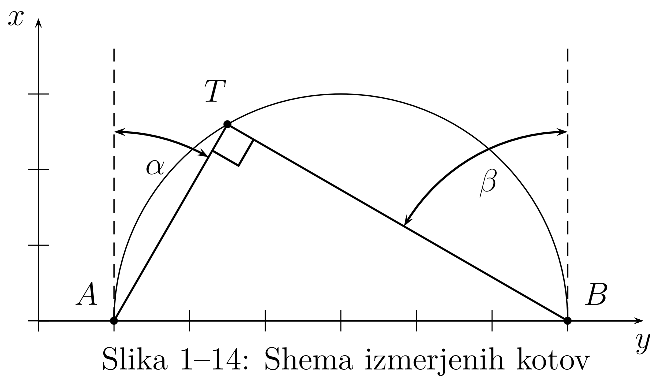
$$
\begin{aligned}
v_\alpha &= -1{,}667^\circ \\
v_\beta &= 2{,}500^\circ \\
v_\gamma &= -1{,}667^\circ \\
v_\delta &= 2{,}500^\circ \\
v_\omega &= -1{,}667^\circ
\end{aligned} \tag{1–188}
$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= 58{,}333^\circ \\
\hat{\beta} &= 97{,}500^\circ \\
\hat{\gamma} &= 88{,}333^\circ \\
\hat{\delta} &= 82{,}500^\circ \\
\hat{\omega} &= 33{,}333^\circ
\end{aligned} \tag{1–189}
$$

1.10 Primer 7 - Položaj točke T

Določiti želimo koordinate točke $T(y_T, x_T)$, ki leži na krožnici, določeni z diametralnima točkama $A(10{,}0\,\mathrm{m}, 0{,}0\,\mathrm{m})$ in $B(30{,}0\,\mathrm{m}, 0{,}0\,\mathrm{m})$ (glej sliko 1–14). Opazovali smo kota $\alpha = 27°13'$ in $\beta = 62°45'$, pri tem, da smo kot α izmerili dvakrat bolj natančno kot kot β. S posredno in direktno metodo izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T.



Slika 1–14: Shema izmerjenih kotov

1.10.1 Direktna metoda

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27°13' \\ 62°45' \end{bmatrix} \tag{1–190}$$
   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana, torej velja:
   $$p_\alpha = 4.0 \quad p_\beta = 1.0 \tag{1–191}$$
   Določiti je potrebno minimalno število opazovanj za izračun naloge, ki je $n_0 = 1$. Število nadštevilnih opazovanj je potem $r = 1$. Kako ugotoviti, koliko je n_0? Točka T leži na premici in vprašanje je, ali potrebujemo oba merjena kota, da dobimo presečišče krožnice in premice. *Za enolično določitev položaja lahko uporabimo krožnico in en sam kot (ni pomembno, katerega), torej $n_0 = 1$.*

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja in kontante. Kako dobiti pogoje, katere morajo koti izpolnjevati? Vidimo, da imamo en pravokoten trikotnik in polkrožnico, ki pripada očrtanemu krogu obravnavanega pravokotnega trikotnika.
   $$F_1 \equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° \tag{1–192}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   $$F_1 \equiv \alpha + v_\alpha + \beta + v_\beta = 90° \tag{1–193}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.

$$F_1 \equiv v_\beta = 90° - \alpha - \beta - v_\alpha = 2{,}0' - v_\alpha \tag{1–194}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.

$$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{1–195}$$

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.

$$\Phi = 4.0 v_\alpha^2 + 1.0(2{,}0' - v_\alpha)^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{1–196}$$

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_\alpha} = 2 \cdot 4.0 v_\alpha + 2 \cdot 1.0(2{,}0' - v_\alpha)(-1) = 0 \tag{1–197}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.

$$v_\alpha = \frac{p_\beta(90° - \alpha - \beta)}{p_\alpha + p_\beta} = \frac{1.0 \cdot 2{,}0'}{4.0 + 1.0} = 0{,}40' \tag{1–198}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.

$$v_\beta = 2{,}0° - v_\alpha = 1{,}60' \tag{1–199}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 27°13{,}40' \\ \hat{\beta} &= 62°46{,}60' \end{aligned} \tag{1–200}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
    Iz izravnanih kotov $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$ ter razdalje d_{AB} izračunamo koordinate točke T pri tem pa upoštevamo, da je trikotnik $\triangle ATB$ pravokoten trikotnik. Rezultat je:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + d_{AB} \cos\hat{\beta} \sin\hat{\alpha} = 14{,}185\,\text{m} \\ x_T &= x_A + d_{AB} \cos\hat{\beta} \cos\hat{\alpha} = 8{,}136\,\text{m} \end{aligned} \tag{1–201}$$

1.10.2 Posredna metoda

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27°13' \\ 62°45' \end{bmatrix} \tag{1–202}$$

   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana, torej velja:

$$p_\alpha = 4.0 \quad p_\beta = 1.0 \tag{1–203}$$

   Minimalno število opazovanj za izračun naloge je $n_0 = 1$, število nadštevilnih opazovanj je $r = 1$.

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = 1$. Kaj nastaviti za neznanke? Katero opazovanje nam enolično reši problem? Neznanko označimo z A in naj predstavlja kot α.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Vsa opazovanja povežemo z neznankami: vsako opazovanje ena enačba popravkov.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} = A \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} = 90^\circ - A \end{aligned} \tag{1–204}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha + v_\alpha = A \\ F_2 &\equiv \beta + v_\beta = 90^\circ - A \end{aligned} \tag{1–205}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_\alpha = A - \alpha = A - 27^\circ 13.00' \\ F_2 &\equiv v_\beta = -A + 90^\circ - \beta = -A + 27^\circ 15.00' \end{aligned} \tag{1–206}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
$$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 \Rightarrow \min. \tag{1–207}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
$$\Phi = 4.0(A - 27^\circ 13.00')^2 + 1.0(-A + 27^\circ 15.00')^2 \Rightarrow \min. \tag{1–208}$$

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = 2 \cdot 4.0(A - 27^\circ 13.00') + 2 \cdot 1.0(-A + 27^\circ 15.00')(-1) = 0 \tag{1–209}$$

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.
$$A = \frac{p_\beta(90^\circ - \beta) + p_\alpha \alpha}{p_\alpha + p_\beta} = 27^\circ 13{,}40' \tag{1–210}$$

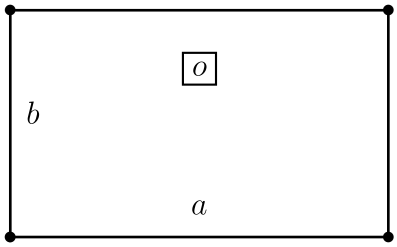
10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi sestavljenih enačb popravkov.
$$\begin{aligned} v_\alpha &= A - \alpha = 0{,}40' \\ v_\beta &= 90^\circ - \beta - A = 1{,}60' \end{aligned} \tag{1–211}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 27^\circ 13{,}40' \\ \hat{\beta} &= 62^\circ 46{,}60' \end{aligned} \tag{1–212}$$

Iz izravnane neznanke A in razdalje d_{AB} izračunamo koordinate točke T pri tem pa upoštevamo, da je trikotnik $\triangle ATB$ pravokoten trikotnik. Rezultat je:
$$\begin{aligned} y_T &= y_A + d_{AB} \sin A \sin A = 14{,}185\,\mathrm{m} \\ x_T &= x_A + d_{AB} \sin A \cos A = 8{,}136\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–213}$$

1.11 Primer 8 - Opazovanja v pravokotniku

Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici: $a = 12{,}4\,\text{m}$ in $b = 7{,}5\,\text{m}$ ter obseg $o = 40{,}0\,\text{m}$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.



Slika 1–15: Opazovanja v pravokotniku

1.11.1 Direktna metoda

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Število opazovanj je $n = 3$, minimalno število opazovanj je $n_0 = 2$ in $r = 1$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}4\,\text{m} \\ 7{,}5\,\text{m} \\ 40{,}0\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–214}$$
   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, torej velja:
   $$p_a = 1.0 \quad p_b = 1.0 \quad p_o = 1.0 \tag{1–215}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja.
   $$F_1 \equiv 2\hat{a} + 2\hat{b} = \hat{o} \tag{1–216}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   $$F_1 \equiv 2a + 2v_a + 2b + 2v_b = o + v_o \tag{1–217}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   $$F_1 \equiv v_o = 2v_a + 2v_b + 2a + 2b - o = 2v_a + 2v_b - 0.2\text{m} \tag{1–218}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   $$\Phi = p_a v_a^2 + p_b v_b^2 + p_o v_o^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{1–219}$$

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   $$\Phi = 1.0 v_a^2 + 1.0 v_b^2 + 1.0(2v_a + 2v_b - 0.2\text{m})^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{1–220}$$

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial v_a} =& 2\cdot 1.0 v_a + 2\cdot 1.0(2v_a + 2v_b - 0.2\mathrm{m})2 = 0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_b} =& 2\cdot 1.0 v_b + 2\cdot 1.0(2v_a + 2v_b - 0.2\mathrm{m})2 = 0\end{aligned} \tag{1–221}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.

$$\begin{aligned}5.0v_a + 4.0v_b &= 0{,}40\,\mathrm{m}\\ 4.0v_a + 5.0v_b &= 0{,}40\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{1–222}$$

$$\begin{aligned}v_a &= 0{,}044\,\mathrm{m}\\ v_b &= 0{,}044\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{1–223}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.

$$v_o = -0{,}022\,\mathrm{m} \tag{1–224}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 12{,}444\,\mathrm{m}\\ \hat{b} &= 7{,}544\,\mathrm{m}\\ \hat{o} &= 39{,}978\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{1–225}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Naloga zahteva, da izračunamo površino S pravokotnika. Velja:

$$S = \hat{a}\hat{b} = \hat{a}(\hat{o} - 2\hat{b}) = \hat{b}(\hat{o} - 2\hat{a}) = 93{,}8864\,\mathrm{m}^2 \tag{1–226}$$

1.11.2 Posredna metoda

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Število opazovanj je $n = 3$, minimalno število opazovanj je $n_0 = 2$ in $r = 1$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}4\,\mathrm{m} \\ 7{,}5\,\mathrm{m} \\ 40{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–227}$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, torej velja:

$$p_a = 1.0 \quad p_b = 1.0 \quad p_o = 1.0 \tag{1–228}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = 2$ Nastavimo dve neznanki, x in y, kjer x predstavlja stranico a, y pa stranico b.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Vsa opazovanja povežemo z neznankami: vsako opazovanje ena enačba popravkov.

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{a} = x \\
F_2 &\equiv \hat{b} = y \\
F_3 &\equiv \hat{o} = 2x + 2y
\end{aligned}
\tag{1–229}
$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv a + v_a = x \\
F_2 &\equiv b + v_b = y \\
F_3 &\equiv o + v_o = 2x + 2y
\end{aligned}
\tag{1–230}
$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv v_a = x - a \\
F_2 &\equiv v_b = y - b \\
F_3 &\equiv v_o = 2x + 2y - o
\end{aligned}
\tag{1–231}
$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.

$$
\Phi = p_a v_a^2 + p_b v_b^2 + p_o v_o^2 \Rightarrow \min. \tag{1–232}
$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.

$$
\Phi = 1.0(x - 12{,}4\,\mathrm{m})^2 + 1.0(y - 7{,}5\,\mathrm{m})^2 + 1.0(2x + 2y - 40{,}0\,\mathrm{m})^2 \Rightarrow \min. \tag{1–233}
$$

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2 \cdot 1.0(x - 12{,}4\,\mathrm{m}) + 2 \cdot 40.0(2x + 2y - 40{,}0\,\mathrm{m})2 = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2 \cdot 1.0(y - 7{,}5\,\mathrm{m}) + 2 \cdot 40.0(2x + 2y - 40{,}0\,\mathrm{m})2 = 0
\end{aligned}
\tag{1–234}
$$

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

$$
\begin{aligned}
5.0\,x + 4.0\,y &= 92.40 \\
4.0\,x + 5.0\,y &= 87.50
\end{aligned}
\tag{1–235}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= 12{,}444\,\mathrm{m} \\
y &= 7{,}544\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{1–236}
$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi sestavljenih enačb popravkov.

$$
\begin{aligned}
v_a &= x - a = 0{,}044\,\mathrm{m} \\
v_b &= y - b = 0{,}044\,\mathrm{m} \\
v_o &= 2x + 2y - o = -0{,}022\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{1–237}
$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 12{,}444\,\mathrm{m}\\ \hat{b} &= 7{,}544\,\mathrm{m}\\ \hat{o} &= 39{,}978\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{1–238}$$

Naloga zahteva, da izračunamo površino S pravokotnika. Velja:

$$S = \hat{a}\hat{b} = \hat{a}(\hat{o} - 2\hat{b}) = \hat{b}(\hat{o} - 2\hat{a}) = 93{,}8864\,\mathrm{m}^2 \tag{1–239}$$

1.12 Primeri – dodatno

1. V krogu smo izmerili polmer trikrat in dobili: $r_1 = 2{,}5\,\text{cm}$, $r_2 = 2{,}6\,\text{cm}$ in $r_3 = 2{,}7\,\text{cm}$. Opazovanja izravnajte po metodi najmanjših kvadratov, če so ta nekorelirana in različne natančnosti: $\sigma_{r_1} = 0{,}1\,\text{cm}$, $\sigma_{r_2} = 0{,}2\,\text{cm}$ in $\sigma_{r_3} = 0{,}15\,\text{cm}$.
   Nalogo rešite še tako, da bodo opazovanja enake natančnosti.
   Obe rešitvi dobite tudi tako, da uporabite uteženo oziroma navadno sredino opazovanj.

   REŠITEV: Različne natančnosti: $R = \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r}_3 = 2{,}57\,\text{cm}$. Enake natančnosti: $R = \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r}_3 = 2{,}6\,\text{cm}$.

2. Med reperjema A in B je bila višinska razlika izmerjena trikrat, dobili pa smo Δh_1, Δh_2 in Δh_3. Izravnajte opazovanja s posredno in direktno metodo, če so dolžine nivelmanskih linij enake: l_1, $l_2 = 2l_1$ in $l_3 = 3l_2$. Nalogo rešite prvo analitično, nato pa še numerično, če so opazovanja dana kot: $\Delta h_1 = 12{,}256\,\text{m}$, $\Delta h_2 = 12{,}240\,\text{m}$ in $\Delta h_3 = 12{,}255\,\text{m}$.

   REŠITEV: Analitična rešitev - utežena sredina: $\Delta h_A^B = \Delta\hat{h}_1 = \Delta\hat{h}_2 = \Delta\hat{h}_3 = \frac{\Delta h_1 + \frac{1}{2}\Delta h_2 + \frac{1}{6}\Delta h_3}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$.
   Numerična rešitev: $\Delta h_A^B = 12{,}2511\,\text{m}$.

3. Dolžino D med točkama A in B smo opazovali dvakrat in dobili $d_1 = 12{,}12\,\text{m}$ ter $d_2 = 12{,}14\,\text{m}$. Če sta opazovanji enake natančnosti, za vrednosti korelacije med dolžinama $\rho_{12} = \{-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.4\}$ izravnaj opazovanji in izračunaj dolžino D.

   REŠITEV: $D = 12{,}13\,\text{m}$.

4. Dolžino D med točkama A in B smo opazovali dvakrat in dobili $d_1 = 12{,}12\,\text{m}$ ter $d_2 = 12{,}14\,\text{m}$. Če sta natančnosti opazovanji enaki $\sigma_1 = 1\,\text{cm}$ in $\sigma_2 = 2\,\text{cm}$, za vrednosti korelacije med dolžinama $\rho_{12} = \{-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.4\}$ izravnaj opazovanji in izračunaj dolžino D.

   REŠITEV: $D(\rho_{12} = -0.8) = 12{,}126\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = -0.4) = 12{,}125\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = 0.0) = 12{,}124\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = 0.4) = 12{,}121\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = 0.8) = 12{,}113\,\text{m}$.

5. Dolžino d smo opazovali dvakrat neodvisno in dobili d_1 in d_2. Opazovanje d_1 je dvakrat slabše natančnosti od opazovanja d_2. S pomočjo metode najmanjših kvadratov (direktna in posredna) pokažite, katero opazovanje bo imelo večji vpliv na rezultate izravnave.

   REŠITEV: Ker ima prvo opazovanje dvakrat slabšo natančnost, sta uteži opazovanj enaki: $p_1 = 1$ in $p_2 = 4$. Rezultat izravnave dolžine - utežena sredina - nam poda: $d = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2}{p_1 + p_2} = \frac{d_1 + 4d_2}{5}$. Izravnana vrednost dolžine d bo bližje merjeni vrednosti d_2 kot pa d_1, saj ima d_2 večjo utež. Točneje, popravek v_1 bo 4-krat večji od popravka v_2, saj sta v razmerju: $v_1 : v_2 = 1/p_1 : 1/p_2$.

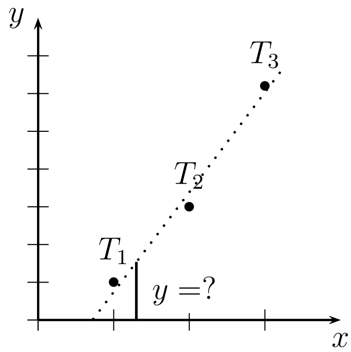
6. Izravnajte opazovane vrednosti ordinat treh točk tako, da bodo točke ležale na premici z enačbo: $y = kx + n$! Opazovanja so nekorelirana in enake natančnosti! Abscise točk so dane in jih nismo opazovali. Koordinate točk so: $T_1(0.2, 0.0)$, $T_2(0.9, 1.0)$ in $T_3(2.0, 2.1)$.

   REŠITEV: $k = 1.152$, $n = -0.157$.

7. Izravnajte opazovane vrednosti ordinat treh točk tako, da bodo točke ležale na premici z enačbo, ki gre skozi središče! Opazovanja so nekorelirana in enake natančnosti! Abscise točk so dane in jih nismo opazovali. Opazovanja so: $T_1(0.2, 0.0)$, $T_2(0.9, 1.0)$ in $T_3(2.0, 2.1)$.

   REŠITEV: $k = 1.0515$ (prosti člen mora biti enak $n = 0$).

8. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, a poznamo korelacijo $\rho_{y_1 y_2} = -0.25$, po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate y pri vrednosti koordinate $x = 1.3$.



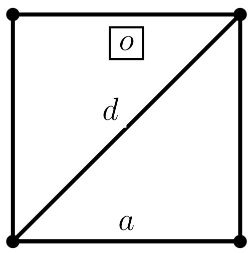
Slika 1–16: Naloga 8

REŠITEV: Parametra premice: $a = 2{,}054$, $b = -1{,}075$, $y(1.3) = 1{,}595$.

9. Izravnajte opazovane vrednosti **abscis** treh točk tako, da bodo točke ležale na premici z enačbo: $y = kx + n$! Opazovanja so nekorelirana in enake natančnosti! **Ordinate** točk so dane in jih nismo opazovali. Opazovanja so: $T_1(0.2, 0.0)$, $T_2(0.9, 1.0)$ in $T_3(2.0, 2.1)$.

REŠITEV: Namig: prvo izravnajte premico oblike $x = ay + b$ (izračunajte a in b) in nato preblikujte enačbo $x = ay + b$ v $y = kx + n$ - $k = 1.163$, $n = -0.169$.

10. V kvadratu smo izmerili stranico $a = 3{,}0\,\mathrm{m}$, diagonalo $d = 4{,}2\,\mathrm{m}$ in obseg $o = 11{,}9\,\mathrm{m}$. Če sta a in d opazovani dvakrat bolj natančno kot o, z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.



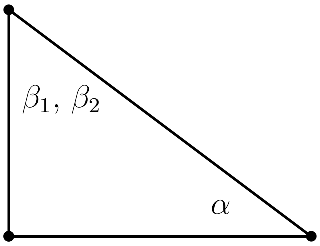
Slika 1–17: Naloga 10

REŠITEV: $\hat{a} = 2{,}977\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 4{,}210\,\mathrm{m}$, $\hat{o} = 11{,}908\,\mathrm{m}$.

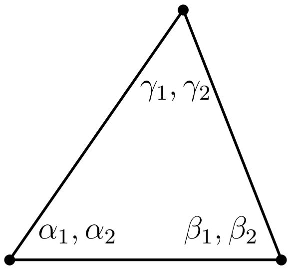
11. V pravokotnem trikotniku smo izmerili oba notranja kota, in sicer: $\alpha = 33°42'$, $\beta_1 = 56°20'$ in $\beta_2 = 56°21'$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_\alpha = 1'$, $\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = 2'$) in medseboj korelirana ($\rho_{\beta_1\beta_2} = 0.75$), po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_1$ in $\hat{\beta}_2$.

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 33°41'26{,}7''$, $\hat{\beta} = 56°18'33{,}3''$.

12. V trikotniku smo merili vse tri notranje kote (α, β, γ), pri tem, da smo vsak kot smo izmerili dvakrat. Dobili smo: $\alpha_1 = 33°17'$, $\alpha_2 = 33°20'$, $\beta_1 = 80°41'$, $\beta_2 = 80°39'$, $\gamma_1 = 66°5'$ in



Slika 1–18: Naloga 11

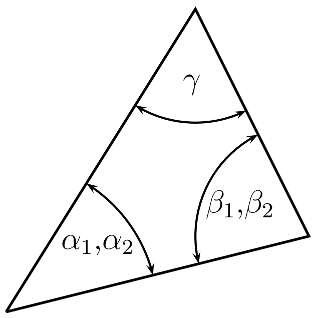


Slika 1–19: Naloga 12

$\gamma_2 = 66°0'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, izravnaj opazovanja z direktno in posredno metodo po MNK.

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 33°18'10''$, $\hat{\beta} = 80°39'40''$, $\hat{\gamma} = 66°2'10''$.

13. V splošnem trikotniku smo opazovali vse tri notranje kote in dobili (glej skico): $\alpha_1 = 47°15'$, $\alpha_2 = 47°20'$ ($\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 3'$), $\beta_1 = 82°25'$, $\beta_2 = 82°20'$ ($\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = 3'$) in $\gamma = 50°0'$ ($\sigma_\gamma = 5'$). Z direktno metodo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj izravnane vrednosti notranjih kotov $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ in $\hat{\gamma}$.



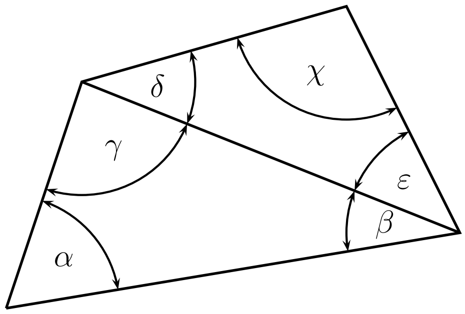
Slika 1–20: Naloga 13

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 47°20'8{,}9''$, $\hat{\beta} = 82°25'8{,}9''$, $\hat{\gamma} = 50°14'42{,}3''$.

14. V geodetskem štirikotniku smo izmerili niz kotov, kot jih prikazuje skica. Vsi koti so izmerjeni z enako natančnostjo in imajo vrednosti: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 88°$, $\delta = 40°$, $\varepsilon = 74°$, $\chi = 65°$. Z metodo najmanjših kvadratov določite izravnane vrednosti kotov, in sicer (brez uporabe matrik) posredno (uvedba neznank) in direktno.

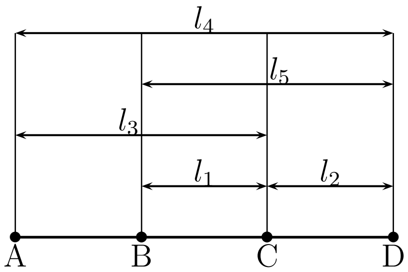
REŠITEV: $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = 40'$, $v_\delta = v_\varepsilon = v_\chi = 20'$.

15. Geometričen model, predstavljen na sliki, prikazuje tri kolinearne razdalje $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ in $\overline{CD}$. V geometričnem modelu smo opazovali: $l_1 = 10{,}0\,\mathrm{m}$, $l_2 = 10{,}1\,\mathrm{m}$, $l_3 = 19{,}5\,\mathrm{m}$, $l_4 = 30{,}1\,\mathrm{m}$ in



Slika 1–21: Naloga 14

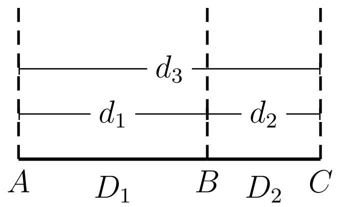
$l_5 = 20{,}1\,\mathrm{m}$. Z obema metodama po MNK izravnajte opazovanja in določite dolžine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ in $\overline{CD}$.



Slika 1–22: Naloga 15

REŠITEV: $\overline{AB} = 9{,}975\,\mathrm{m}$, $\overline{BC} = 9{,}9375\,\mathrm{m}$, $\overline{CD} = 10{,}225\,\mathrm{m}$.

16. Za kontrolo kakovosti razdaljemera smo vzpostavili model dveh vzporednih razdalj $D_1 = \overline{AB}$ in $D_2 = \overline{BC}$ (glej sliko). Med točkami smo opazovali dolžine $d_1 = 15{,}30\,\mathrm{m}$, $d_2 = 11{,}65\,\mathrm{m}$ in $d_3 = 27{,}00\,\mathrm{m}$, vse so bile izmerjene z enako natančnostjo, le da sta dolžini d_1 in d_2 korelirani, in sicer $\rho_{d_1 d_2} = 0.1$. Po MNK izravnaj opazovanja in določi izravnane vrednosti dolžin D_1 in D_2.



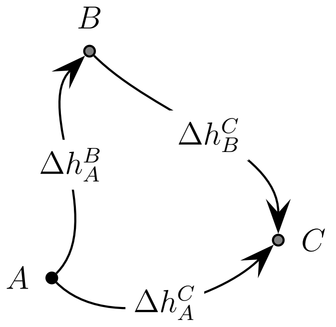
Slika 1–23: Naloga 16

REŠITEV: $D_1 = 15{,}317\,\mathrm{m}$,$D_2 = 11{,}667\,\mathrm{m}$.

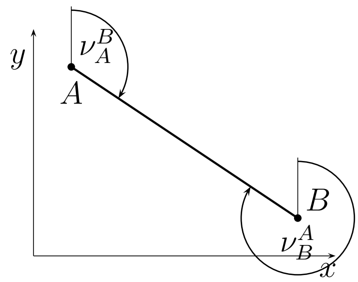
17. Določiti želimo višine dvema novima reperjema B in C s postopkom geometričnega nivelmana. Izmerili smo (glej skico): $\Delta h_A^B = 1{,}332\,\mathrm{m}$, $\Delta h_A^C = 1{,}785\,\mathrm{m}$ in $\Delta h_B^C = 0{,}450\,\mathrm{m}$. Če je višina točke A dana ($H_A = 10{,}0\,\mathrm{m}$) in so dolžine nivelmanskih linij dolge $d_{AB} = 100\,\mathrm{m}$, $d_{BC} = 100\,\mathrm{m}$ in $d_{AC} = 200\,\mathrm{m}$, po MNK izravnaj opazovanja in določi višine vsem novim reperjem.

REŠITEV: $H_B = 11{,}33275\,\mathrm{m}$, $H_C = 11{,}7835\,\mathrm{m}$.

18. Na dveh točkah A in B smo opazovali oba smerna kota in dobili $\nu_A^B = 147°12'17{,}9''$ in $\nu_B^A = 327°12'22{,}1''$. Če za natančnosti obeh merjenih smernih kotov velja $\sigma_{\nu_A^B} = 2\sigma_{\nu_B^A}$, po MNK izravnajte opazovanja (brez matrik).



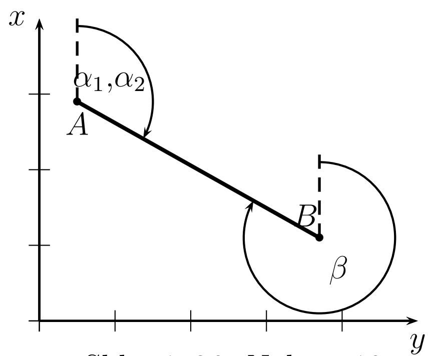
Slika 1–24: Naloga 17



Slika 1–25: Naloga 18

REŠITEV: $\hat{\nu}_A^B = 147°12'21{,}3''$.

19. Na točki A smo izmerili smerni kot do točke B dvakrat in dobili $\alpha_1 = 147°12'18''$ in $\alpha_2 = 147°12'20''$, na točki B pa smo opazovali smerni kot do točke A enkrat in dobili $\beta = 327°12'24''$. Če so si natančnosti opazovanj v razmerju $\sigma_{\alpha_1} : \sigma_{\alpha_2} : \sigma_\beta = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$, po MNK izravnaj opazovanja.



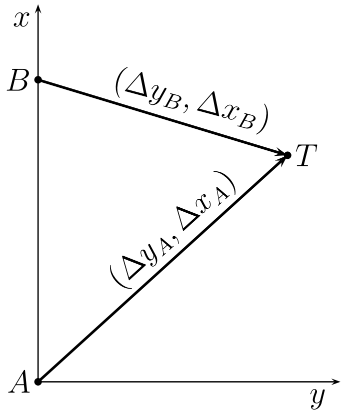
Slika 1–26: Naloga 19

REŠITEV: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 147°12'21{,}5''$.

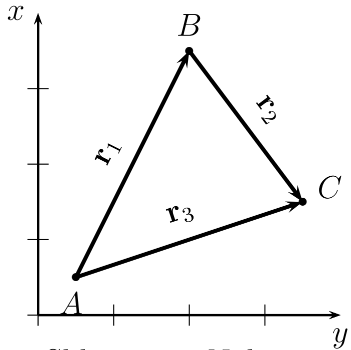
20. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (0\,\mathrm{m}, 5\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja; $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3{,}5\,\mathrm{m}, 2{,}1\,\mathrm{m})$ in $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3{,}4\,\mathrm{m}, -3{,}0\,\mathrm{m})$. Po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T, če je bazni vektor s točke A določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke B.

REŠITEV: $T(y_T, x_T) = (3{,}48\,\mathrm{m}, 2{,}08\,\mathrm{m})$.

21. Podano imamo eno točko, in sicer $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\mathrm{m}, 10{,}0\,\mathrm{m})$. Za določitev koordinat dveh novih točk $B(y_B, x_B)$ in $C(y_C, x_C)$ smo izmerili tri vektorje $\mathbf{r}_1$=$(\Delta y_1, \Delta x_1)$=$(70{,}1\,\mathrm{m}, 89{,}8\,\mathrm{m})$, $\mathbf{r}_2$=$(\Delta y_2, \Delta x_2)$=$(69{,}8\,\mathrm{m}, -69{,}9\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_3$=$(\Delta y_3, \Delta x_3)$=$(140{,}2\,\mathrm{m}, 19{,}7\,\mathrm{m})$. Če so komponente vektorja $\mathbf{r}_3$ določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, po MNK določite koordinate točk B in C.



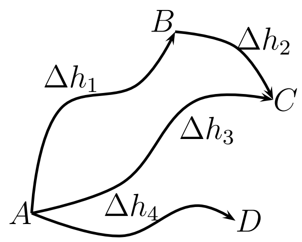
Slika 1–27: Naloga 20



Slika 1–28: Naloga 21

REŠITEV: $B(y_B, x_B) = (80{,}233\,\mathrm{m}, 99{,}711\,\mathrm{m})$, $C(y_C, x_C) = (150{,}167\,\mathrm{m}, 29{,}722\,\mathrm{m})$.

22. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper A dano višino $H_A = 10{,}0\,\mathrm{m}$. Izmerili smo 4 višinske razlike (glej skico) s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij: $\Delta h_1 = -1{,}01\,\mathrm{m}$ ($d_1 = 50\,\mathrm{m}$), $\Delta h_2 = 0{,}73\,\mathrm{m}$ ($d_2 = 20\,\mathrm{m}$), $\Delta h_3 = -0{,}25\,\mathrm{m}$ ($d_3 = 50\,\mathrm{m}$) in $\Delta h_4 = 0{,}12\,\mathrm{m}$ ($d_4 = 50\,\mathrm{m}$). Po MNK izravnaj opazovanja in določi višine reperjev B, C in D.



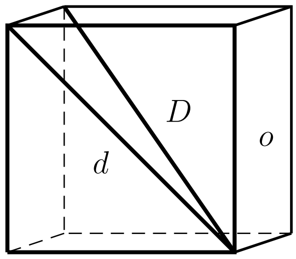
Slika 1–29: Naloga 22

REŠITEV: $H_B = 9{,}0025\,\mathrm{m}$, $H_C = 9{,}7375\,\mathrm{m}$, $H_D = 10{,}12\,\mathrm{m}$.

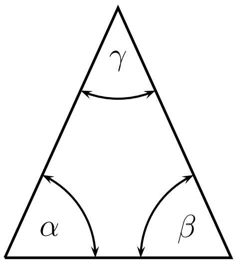
23. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14{,}0\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17{,}0\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40{,}0\,\mathrm{m}$). Po MNK izravnaj opazovanja (brez matrik), če sta obe diagonali (d in D) opazovani dvakrat bolj natančno kot obseg (o). Izračunaj tudi prostornino kocke.

REŠITEV: $a = 9{,}916\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 14{,}023\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 17{,}175\,\mathrm{m}$, $\hat{o} = 39{,}664\,\mathrm{m}$, $V = a^3 = 975{,}006\,\mathrm{m}^3$.

24. V enakokrakem trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote α, β, γ, in sicer $\alpha = 70°$, $\beta = 71°$ in $\gamma = 40°$. Če je kot γ opazovanj 2-krat bolj natančno kot kota α in β, izravnaj opazovanja po MNK.



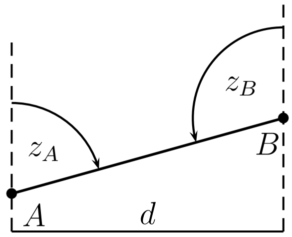
Slika 1–30: Naloga 23



Slika 1–31: Naloga 24

REŠITEV: $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 70°3'20''$, $\hat{\gamma} = 39°53'20''$.

25. Med točkama A in B smo obojestransko izmerili zenitni razdalji $z_A = 84°30'$ in $z_B = 95°35'$ (glej skico), kjer je zenitna razdalja z_A izmerjena 3-krat bolj natančno kot zenitna razdalja z_B. Po MNK izravnaj opazovanja in določi višinsko razliko Δh_A^B, če je horizontalna razdalja med točkama A in B enaka $d = 100\,\mathrm{m}$.



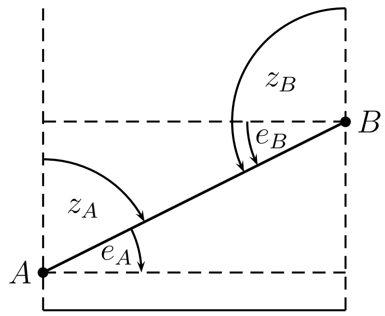
Slika 1–32: Naloga 25

REŠITEV: $\hat{z}_A = 84°29'30''$, $\hat{z}_B = 95°30'30''$, $\Delta h_A^B = 9{,}644\,\mathrm{m}$.

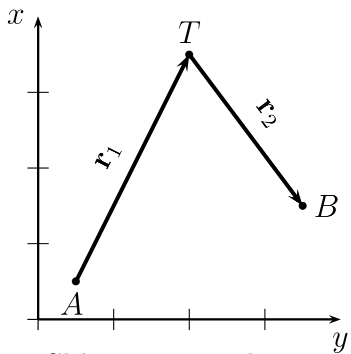
26. Med točkama A in B smo obojestransko izmerili zenitni razdalji $z_A = 84°30'$ in $z_B = 95°35'$ in višinska kota $e_A = 5°25'$ in $e_B = -5°30'$ (glej skico). Če sta kota na točki A izmerjena 3-krat bolj natančno kot kota na točki B, po MNK izravnaj opazovanja in določi višinsko razliko Δh_A^B. Horizontalna razdalja med točkama A in B je enaka $d = 100\,\mathrm{m}$.

REŠITEV: $\hat{z}_A = 84°32'0''$, $\hat{e}_A = 5°28'0''$, $\Delta h_A^B = 9{,}570\,\mathrm{m}$.

27. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 30\,\mathrm{m})$. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja $\mathbf{r}_1 = (\Delta y_1, \Delta x_1) = (30{,}1\,\mathrm{m}, 49{,}8\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_2 = (\Delta y_2, \Delta x_2) = (60{,}0\,\mathrm{m}, -30{,}1\,\mathrm{m})$, kot kaže skica. Če so natančnosti koordinat dane kot $\sigma_{y_1} = \sigma_{x_1} = 5\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_{y_2} = \sigma_{x_2} = 7\,\mathrm{cm}$, po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T.



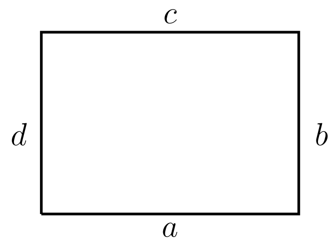
Slika 1–33: Naloga 26



Slika 1–34: Naloga 27

REŠITEV: $T(y_T, x_T) = (40{,}066\,\text{m}, 59{,}901\,\text{m})$.

28. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15{,}0\,\text{m}$, $b = 10{,}0\,\text{m}$, $c = 14{,}9\,\text{m}$ in $d = 10{,}1\,\text{m}$. Če nas zanimata obseg O in osnovna stranica a pravokotnika, s posredno metodo po MNK izravnajte opazovanja tako, da za neznanki nastavite O in a. Stranici a in c sta izmerjeni dvakrat bolj natančno kot stranici b in d. Rezultate preverite tudi z direktno metodo po MNK.

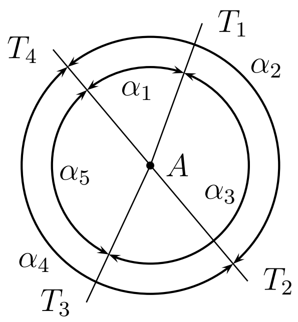


Slika 1–35: Naloga 28

REŠITEV: $\hat{a} = 14{,}95\,\text{m}$, $O = 50{,}00\,\text{m}$.

29. S stojišča A smo preko opazovanih smeri pridobili kote: $\alpha_1 = 61°34'$, $\alpha_2 = 135°13'$, $\alpha_3 = 148°15'$, $\alpha_4 = 224°51'$, $\alpha_5 = 150°14'$, kot jih prikazuje skica. Če so opazovanja (t.s. koti) neodvisna in enake natančnosti z metodo najmanjših kvadratov določite izravnane vrednosti kotov.

REŠITEV: $v_{\alpha_1} = v_{\alpha_2} = v_{\alpha_3} = -1'$, $v_{\alpha_2} = v_{\alpha_4} = -2'$.



Slika 1–36: Naloga 29