Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 1 - VAJE
Uteži geodetskih opazovanj

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 Uteži geodetskih opazovanj

1.1 Opis kakovosti geodetskih opazovanj

V geodeziji obravnavamo dva vidika geodetskih opazovanj. Prvi vidik so numerične vrednosti opazovanj, ki jih zapišemo v vektor $\mathbf{l}$, dimenzije $n \times 1$, oblike:

$$\mathbf{l}_{n\times 1} = \left[\begin{array}{ccccc} l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{array} \right]^{\mathrm{T}} \tag{1–1}$$

Opazovanja pridobimo v postopku izmere in se vedno nanašajo na neke neznane – iskane količine (neznanke). Temu vidiku opazovanj, njihovim numeričnim vrednostim in povezavi z neznankami, pravimo **funkcionalni model**.

Drugi vidik geodetskih opazovanj pa je statistični vidik. Zavemo se, da so vsa opazovanja slučajne spremenljivke, kar pomeni, da imajo vsa prisotne pogreške. Pri *Zakonu o prenosu pravih pogreškov* smo predpostavili, da pogreške poznamo (zato pravi pogreški), v splošnem pa njihovih vrednosti ne poznamo. Ocenimo lahko le statistične lastnosti teh pogreškov, kar predstavlja drugi vidik – **stohastični model**. Stohastični model predstavlja variančno-kovariančna matrika opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ (na krato kar kovariančna matrika) velikosti $n \times n$, ki ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{n\times n} = \left[\begin{array}{ccccc} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{array} \right] \tag{1–2}$$

V matriki $\mathbf{\Sigma}$ (enačba (1–2)) nastopata dve količini, in sicer:

- variance σ_i^2 $(i = \{1, 2 \dots n\})$, ki ležijo na diagonali matrike in predstavljajo mero razpršenosti posameznega opazovanja (kvadrati standarnih odklonov opazovanj σ_i) in
- kovariance σ_{ij} $(i, j = \{1, 2 \dots n\},\ i \neq j)$, ki ležijo izven diagonale in predstavljajo stopnjo koreliranosti med opazovanji:

  $$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j = \sigma_{ji} \tag{1–3}$$

  V enačbi (1–3) količina ρ_{ij} predstavlja korelacijski koeficient med opazovanjema l_i in l_j, za katerega velja $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Kovarianca σ_{ij} je produkt treh količin, korelacijskega koeficienta ρ_{ij} in standardnih odklonov obeh opazovanj σ_i in σ_j. Iz enačbe (1–3) je razvidna zelo pomembna lastnost variančno kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}$, in sicer matrika je SIMETRIČNA (pozneje boste ugotovili tudi POZITIVNO SEMI-DEFINITNA).

Kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ vsebuje vse informacije o natančnostih opazovanj (variance) in o njihovih korelacijah (kovariance). Praktično pa ima matrika $\mathbf{\Sigma}$ eno slabost, ki se nanaša na zapis natančnosti opazovanj, torej na standardne odklone opazovanj σ_i, in sicer:

- velika natančnost $\rightarrow$ majhna vrednost σ_i in obratno
- nizka natančnost $\rightarrow$ velika vrednost σ_i.

Želeli bi ravno obratno. Natančnost bi zapisali z neko oznako p_i, ki bi imela lastnost: če je opazovanje izmerjeno bolj natančno, naj bo njegova vrednost večja. Če je opazovanje izmerjeno bolj natančno, naj ima v postopku obdelave tudi večjo težo pri računanju končnih rezultatov. Tako pridemo do pojma **uteži** opazovanj. A preden definiramo uteži opazovanj, moramo prvo definirati matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, ki ima obliko:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Sigma} = \sigma_0^2\mathbf{Q} \tag{1–4}$$

Matriko $\mathbf{Q}$ iz enačbe (1–4) dobimo tako, da kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ delimo z neke vrste varianco σ_0^2. Le-ta ima posebno ime, pravimo ji **referenčna varianca a-priori**. Kaj σ_0^2 predstavlja? Če bi pogledali v spletno aplikacijo *fran*[1] vnesli pridevnik `aprioren`, bi dobili pojasnitev "*dan neodvisno od izkustva*". To pomeni, da za referenčno varianco a-priori σ_0^2 lahko izberemo poljubno vrednost. Neko praktično vodilo pri letošnjem predmetu – izberemo tako vrednost, da bodo v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ (in nato v matriki $\mathbf{P}$ spodaj) enostavne/lepe vrednosti (npr. cela števila namesto ulomkov ali decimalnih števil in podobno).

Matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ ima obliko:

$$\mathbf{Q}_{n\times n} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} q_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_2 & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_n \end{bmatrix} \tag{1–5}$$

V matriki $\mathbf{Q}$ elementi q_i ($i = \{1, 2 \ldots n\}$) predstavljajo kofaktorje opazovanj, velja $q_i = \sigma_i^2/\sigma_0^2$ in predstavljajo razmerja med natančnosti opazovanj, saj vse elemente matrike $\mathbf{\Sigma}$ delimo z σ_0^2. Elementi izven diagonale nakazujejo na korelacije med opazovanji in velja $q_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_0^2$. Z invertiranjem matrike $\mathbf{Q}$ pa dobimo matriko uteži $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2\mathbf{\Sigma}^{-1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Sigma} = \sigma_0^2\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{P}^{-1} \tag{1–6}$$

Matrika uteži $\mathbf{P}$ ima obliko:

$$\mathbf{P}_{n\times n} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_2 & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_n \end{bmatrix} \tag{1–7}$$

V matriki $\mathbf{P}$ diagonalni elementi p_i ($i = \{1, 2 \ldots n\}$) predstavljajo uteži opazovanj in se nanašajo na razmerja med natančnostmi opazovanj. Elementi izved diagonale tudi tu nakazujejo korelacijo med opazovanji. Matrika uteži ima tisto lastnost, ki smo jo zgoraj hoteli, in sicer:

- velika natančnost → velika vrednost uteži p_i in obratno
- nizka natančnost → majhna vrednost uteži p_i.

Prikažimo na koncu še povezavo med tremi količinami, ki se nanašajo na stohastično informacijo o i-tem opazovanju, to so varianca opazovanja σ_i^2, referenčna varianca a-priori σ_0^2 in utež opazovanja p_i. Količine so povezane preko enačbe:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \tag{1–8}$$

[1] https://fran.si/

Rezultat iz enačbe (1–8) dobimo, če predpostavimo, da imamo eno samo opazovanja in uporabimo enačbo (1–6). V nadaljevanju prikazujemo nekaj tipičnih načinov podajanja natančnosti in računanja matrike uteži.

1.2 Opazovanja enake natančnosti in nekorelirana

Pri polarni izmeri smo opazovali dolžino s in kot α. Sestavi matriko $\mathbf{\Sigma}$, nastavi σ_0^2, sestavi $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Če je vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s & \alpha \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, potem ima kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \tag{1–9}$$

Iz navodil naloge numeričnih vrednosti natančnosti opazovanj ne poznamo (σ_s in σ_α), prav tako ne poznamo korelacijskega koeficienta ($\rho_{s\alpha}$) med opazovanjema. V takem primeru sklepamo:

- ker nimamo podanih natančnosti opazovanj $\rightarrow$ vsa opazovanja so enake natančnosti in jih označimo s σ ($\sigma_s = \sigma_\alpha = \sigma$),
- ker nimamo podanih informacij o korelacijah $\rightarrow$ vsa opazovanja so medseboj nekorelirana, kar pomeni $\rho_{s\alpha} = 0$.

Iz zgornjih dveh alineh lahko sestavimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0\sigma\sigma \\ 0\sigma\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{1–10}$$

Za izračun matrike kofaktorev $\mathbf{Q}$ moramo prvo nastaviti referenčno varianco a-priori σ_0^2. Če, glede na obliko kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}$ iz enačbe (1–10), nastavimo kar $\sigma_0^2 = \sigma^2$, bomo dobili:

$$\mathbf{Q}_{2\times 2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{\sigma_2} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \tag{1–11}$$

Vidimo, da smo za matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ dobili kar enotsko matriko $\mathbf{I}$. Matrika uteži $\mathbf{P}$ je zato:

$$\mathbf{P}_{2\times 2} = \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–12}$$

Ker je matrika $\mathbf{Q}$ enotska matrika, je tudi matrika $\mathbf{P}$ enotska matrika. To pomeni, da sta uteži opazovanj $p_s = p_\alpha = 1$. Obe opazovanji sta enako natančni, zato imata enako utež. Tu velja pomemben zaključek, in sicer: če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, potem je matrika uteži $\mathbf{P}$ kar enotska matrika $\mathbf{I}$. Uteži vseh opazovanj so enake 1.

1.3 Natančnosti opazovanj so podane v razmerju, korelacij ni

Pri polarni izmeri smo opazovali dolžino s in kot α, natančnost dolžine s je dvakrat večja kot natančnost kota α. Sestavi matriko $\mathbf{\Sigma}$, nastavi σ_0^2, sestavi $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Enako kot v primeru (1.2) bosta vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s & \alpha \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ in kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times2} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \tag{1–13}$$

Iz navodil naloge imamo podano "*natančnost dolžine s je dvakrat večja kot natančnost kota α*". Če označimo s $\sigma_s = \sigma$, potem je natančnost kota določena kot $\sigma_\alpha = 2\sigma$. Če je dolžina s izmerjena 2-krat bolj natančno, ima kot α standardni odklon 2-krat večji kot dolžina. Po drugi strani, nimamo informacij o korelaciji med opazovanjema, zato spet sklepamo, da je $\rho_{s\alpha} = 0$. Kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ iz enačbe (1–13) lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & (2\sigma)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 4\sigma^2 \end{bmatrix} \tag{1–14}$$

Če za referenčno varianco a-priori σ_0^2 sedaj izberemo $\sigma_0^2 = 4\sigma^2$ (bomo spodaj videli zakaj tako), za matriko $\mathbf{Q}$ dobimo:

$$\mathbf{Q}_{2\times2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{4\sigma_2}\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 4\sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–15}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}$ dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P}_{2\times2} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–16}$$

Matrika uteži $\mathbf{P}$ iz enačbe (1–16) ima, glede na podatke, pomemben zaključek, in sicer: če je razmerje natančnosti dveh opazovanj enako 2, potem je razmerje uteži teh dveh opazovanj enako $1/2^2$. V splošnem, razmerje natančnosti k pomeni razmerje uteži $1/k^2$.

In še zakaj smo izbrali $\sigma_0^2 = 4\sigma^2$, da v matriki $\mathbf{P}$ nimamo ulomkov, imamo enostavno obliko matrike.

1.4 Natančnosti opazovanj so podane, korelacij ni

Pri polarni izmeri smo opazovali dolžino s in kot α, natančnosti opazovanj pa sta: $\sigma_s = 1.0\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_\alpha = 30''$. Sestavi matriko $\mathbf{\Sigma}$, nastavi σ_0^2, sestavi $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Spet privzamemo vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s & \alpha \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ in kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \tag{1–17}$$

V navodilih naloge imamo podani numerični vrednosti opazovanj (σ_s in σ_α), nimamo pa podane korelacije, zato spet sklepamo, da je $\rho_{s\alpha} = 0$. Tu je pomembno da: če imamo podana tako dolžinska opazovanja kot tudi kotna, moramo vse natančnosti kotnih količin pretvoriti v radiane, dolžinska pa podati v metrih. Kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ iz enačbe (1–17) lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{30}{3600}\frac{\pi}{180}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 2.1154 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \tag{1–18}$$

Za referenčno varianco a-priori σ_0^2 bomo sedaj izbrali vrednost, da bo matrika $\mathbf{Q}$ in posledično matrika $\mathbf{P}$ čim bolj enostavna. Izbrali bomo $\sigma_0^2 = \sigma_s^2 = 0.0001$, zato za matriko $\mathbf{Q}$ dobimo:

$$\mathbf{Q}_{2\times 2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{0.0001}\begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 2.1154 \times 10^{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.1154 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \tag{1–19}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}$ dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P}_{2\times 2} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4727.24 \end{bmatrix} \tag{1–20}$$

1.5 Natančnosti opazovanj niso podane, podana pa je korelacija

Pri polarni izmeri smo opazovali dolžino s in kot α, za kateri pa imamo podano korelacijo $\rho_{s\alpha} = 0.1$. Sestavi matriko $\mathbf{\Sigma}$, nastavi σ_0^2, sestavi $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Tudi tu privzamemo vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s & \alpha \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ in kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \tag{1–21}$$

V navodilih imamo podano samo korelacijo $\rho_{s\alpha}$, medtem ko natančnosti opazovanj nimamo podanih. Iz tega sklepamo, da so opazovanja pridobljena z enako natančnostjo, ki jo bomo označili s σ ($\sigma_s = \sigma_\alpha = \sigma$), kot je to v poglavju (1.2). Zahtevano variančno-kovariančno matriko opazovanj bomo dobili kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho_{s\alpha}\sigma\sigma \\ \rho_{s\alpha}\sigma\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{s\alpha} \\ \rho_{s\alpha} & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–22}$$

Spet si za referenčno varianco a-priori σ_0^2 izberemo ravno σ^2 in s tem dobimo matriko $\mathbf{Q}$ kot:

$$\mathbf{Q}_{2\times 2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–23}$$

Matriko $\mathbf{Q}$ iz enačbe (1–23) invertiramo in dobimo matriko $\mathbf{P}$, ki je:

$$\mathbf{P}_{2\times 2} = \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{0.99} \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–24}$$

1.6 Natančnosti opazovanj iste vrste

Pri zunanjem urezu smo izmerili oba kota, α in β, z natančnostmi $\sigma_\alpha = 30''$ in $\sigma_\beta = 45''$. Sestavi matriko $\mathbf{\Sigma}$, nastavi σ_0^2, sestavi $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Vektor opazovanj je $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ pa:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \tag{1–25}$$

Ker nimamo podane korelacije, sedaj že vemo, da bomo privzeli $\rho_{\alpha\beta} = 0$ in je zato element izven diagonale v matriki $\mathbf{\Sigma}$ iz enačbe (1–25) enak 0. Iz podatkov naloge je razvidno, da imamo samo dve opazovanji, oba kota. Tu je pomembno da: če imamo vsa opazovanja enake vrste, enote v matriki $\mathbf{\Sigma}$ niso pomembne. To pomeni, da lahko variance v matriki $\mathbf{\Sigma}$ podamo kar s kvadratnimi sekundami ($''^2$) in ni potrebe po preračunavanju standardnih odklonov v radiane. Kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$ iz enačbe (1–17) zato zapišemo kot:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900''^2 & 0 \\ 0 & 2025''^2 \end{bmatrix} \tag{1–26}$$

Za referenčno varianco a-priori σ_0^2 bomo sedaj izbrali vrednost, da bo matrika $\mathbf{Q}$ in posledično matrika $\mathbf{P}$ čim bolj enostavna. Izbrali bomo $\sigma_0^2 = \sigma_\beta^2 = 2025''^2$, zato za matriko $\mathbf{Q}$ dobimo:

$$\mathbf{Q}_{2\times 2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{2025''^2} \begin{bmatrix} 900''^2 & 0 \\ 0 & 2025''^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.444 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–27}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}$ dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P}_{2\times 2} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–28}$$

Da v matriki $\mathbf{P}$ iz enačbi (1–28) ne bi imeli decimalnih vrednosti, da bi bila samo cela števila, bi lahko matriko pomnožili s faktorjem 4. Tako bi dobili novo matriko uteži, označimo jo s $\overline{\mathbf{P}}$:

$$\overline{\mathbf{P}} = 4\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1–29}$$

Obe matriki uteži, tako matrika $\mathbf{P}$ iz enačbe (1–28), kot tudi matrika $\overline{\mathbf{P}}$ iz enačbe (1–29), sta veljavni matriki uteži in sta si enakovredni. Matriko uteži $\overline{\mathbf{P}}$ bi lahko dobili tudi tako, da bi za referenčno varianco a-priori σ_0^2 (za izračun $\mathbf{Q}$ iz enačbe (1–27)) vzeli kar $\sigma_0^2 = 4\sigma_\beta^2 = 4 \cdot 2025''^2 = 8100''^2$ in že v enačbi (1–28) dobili vrednosti iz enačbe (1–29). Kako smo prišli to tega rezultata? Glede na enačbo (1–8), ki povezuje varianco opazovanja σ_i^2, referenčno varianco a-priori σ_0^2 in utež opazovanja p_i, lahko za naš primer zapišemo:

$$\begin{aligned} p_\alpha = 9 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\alpha^2} \quad &\rightarrow \quad \sigma_0^2 = p_\alpha \sigma_\alpha^2 = 9 \cdot 900''^2 = 8100''^2 \\ p_\beta = 4 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2} \quad &\rightarrow \quad \sigma_0^2 = p_\beta \sigma_\beta^2 = 4 \cdot 2025''^2 = 8100''^2 \end{aligned} \tag{1–30}$$

1.7 Opazovanja so med seboj korelirana

Pri ločnem preseku smo izmerili obe stranici, a in b, z natančnostmi $\sigma_a = 1.0\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_b = 2.0\,\mathrm{cm}$, podano pa imamo tudi korelacijo $\rho_{ab} = 0.5$. Sestavi matriko $\mathbf{\Sigma}$, nastavi σ_0^2, sestavi $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Vektor opazovanj je $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ pa:

$$\mathbf{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \tag{1–31}$$

Sedaj imamo podani tako natančnosti, kot tudi korelacijo med opazovanji, zato bo kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ polna matrika. Uporabili bomo tudi pravilo iz prejšnjega primera, ko enote niso pomembne, saj imamo samo istovrstna opazovanja. Dobimo:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \rho_{ab}\sigma_a\sigma_b \\ \rho_{ab}\sigma_a\sigma_b & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0\,\mathrm{cm}^2 & 1.0\,\mathrm{cm}^2 \\ 1.0\,\mathrm{cm}^2 & 4.0\,\mathrm{cm}^2 \end{bmatrix} \tag{1–32}$$

Za referenčno varianco a-priori σ_0^2 bomo sedaj izbrali vrednost, da bo matrika $\mathbf{P}$ imela le cele vrednosti. Če si izberemo $\sigma_0^2 = 3.0\,\mathrm{cm}^2$ bomo za matriko $\mathbf{Q}$ dobili:

$$\mathbf{Q}_{2\times 2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{3.0\,\mathrm{cm}^2}\begin{bmatrix} 1.0\,\mathrm{cm}^2 & 1.0\,\mathrm{cm}^2 \\ 1.0\,\mathrm{cm}^2 & 4.0\,\mathrm{cm}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 \\ 0.3333 & 1.3333 \end{bmatrix} \tag{1–33}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}$ dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P}_{2\times 2} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 4.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{1–34}$$

Ko imamo med opazovanji podane korelacije, je izračun inverza matrike malo bolj obsežen.

1.8 Izračun uteži pri geometričnem nivelmanu

Med dvema reperjema smo izmerli dve višinski razliki, Δh_1 in Δh_2, pri tem da sta dolžini nivelmanskih linij za obe opazovanji enaki $d_1 = 100\,\mathrm{m}$ in $d_2 = 200\,\mathrm{m}$. Sestavi matriki $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

Vektor opazovanj je $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 & \Delta h_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Pri geometričnem nivelmanu je pomembno da: se neposredno sestavi matrika uteži $\mathbf{P}$, ki jo sestavimo tako, da za diagonalne elemente damo obratne vrednosti dolžin nivelmanskih linij. Matrika uteži $\mathbf{P}$ ima torej obliko:

$$\mathbf{P}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{200} \end{bmatrix} \tag{1–35}$$

Iz matrike uteži $\mathbf{P}$ lahko nastavimo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ kot:

$$\mathbf{Q}_{2\times 2} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \tag{1–36}$$

Za samo nadaljnjo uporabo matrike uteži $\mathbf{P}$ iz enačbe (1–35), lahko tudi tu (kot v primeru (1.6)) uporabimo matriko uteži $\overline{\mathbf{P}}$, ki jo dobimo tako, da matriko $\mathbf{P}$ iz enačbe (1–35) pomnožimo s faktorjem 200:

$$\overline{\mathbf{P}} = 200\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–37}$$

Pri geometričnem nivelmanu vidimo, da 2-krat daljša nivelmanska linija pomeni 2-krat manjšo utež.