

PRENOS PRAVIH POGREŠKOV – Slepi poligon:

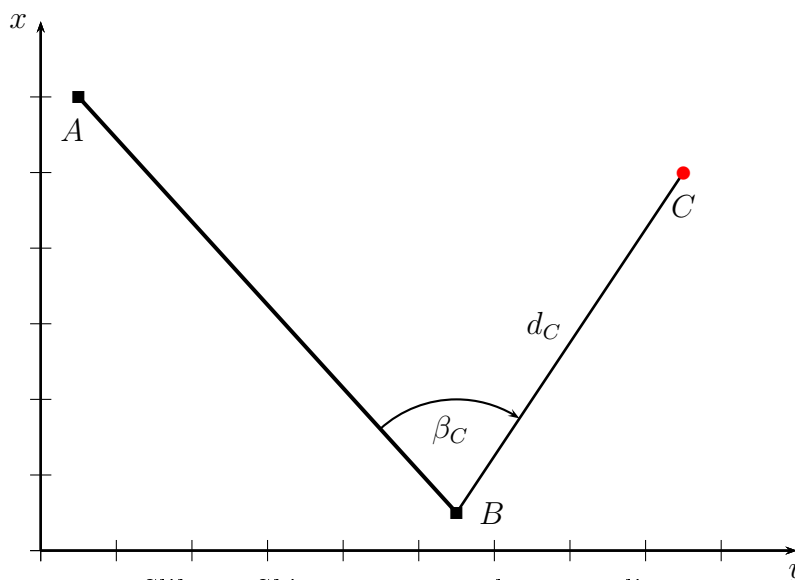
Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi pravimi pogreškami, in sicer:

- $A(y_A, x_A) = (461\,300\text{ m}, 100\,600\text{ m})$ ($\Delta y_A = 0.1\text{ m}$, $\Delta x_A = -0.075\text{ m}$) in
- $B(y_B, x_B) = (461\,400\text{ m}, 100\,550\text{ m})$ ($\Delta y_B = -0.08\text{ m}$, $\Delta x_B = 0.05\text{ m}$).

Do nove točke $C(y_C, x_C)$ smo izmerili obe opazovanji poligona, in sicer:

- priklepni kot $\beta_C = 90^\circ$ ($\Delta\beta_C = 2'$) in
- dolžino $d_C = 75.00\text{ m}$ ($\Delta d_C = 0.05\text{ m}$).

Prikaz izmere je podan na sliki 1. Izračunaj koordinate točke (y_C, x_C) , njuna prava pogreška $(\Delta y_C, \Delta x_C)$ in njuni pravi vrednosti $(\overline{y_C}, \overline{x_C})$.



Slika 1: Skica opazovanj slepega poligona

Preden se lotimo izračuna, pokažimo, kako se izračuna položaj točke C glede na podatke in skico 1. Iz izračuna poligona vemo, da gre postopek takole:

- Izračun smernega kota ν_B^C , ki ga izračunamo na osnovi smernega kota ν_A^B in priklepnega kota β_C . Enačba se glasi:

$$\nu_B^C = \nu_A^B + \beta_C - 180^\circ$$

Smerni kot na izbrani točki v poligonu proti njeni naslednjici izračunamo tako, da uporabimo smerni kot na točki predhodnici in priklepni kota na izbrani točki do naslednjice. Začetni smerni kot poligona izračunamo iz danih točk A in B , tako da se zgornja enačba v celoti zapiše kot:

$$\nu_B^C = \nu_A^B + \beta_C - 180^\circ = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ$$

Tu je pomembno, da vidimo, da se smerni kot ν_B^C izračuna iz številnih količin, to so: koordinate točke $A(y_A, x_A)$ in $B(y_B, x_B)$ ter priklepnega kota β_C .

- Izračun razlik koordinat od točke B do točke $C(y_B^C, x_B^C)$, ki sledi pretvorbi iz geodetskega polarnega v geodetski kartezični koordinatni sistem. Velja:

$$\begin{aligned}y_B^C &= d_C \sin \nu_B^C \\x_B^C &= d_C \cos \nu_B^C\end{aligned}$$

(Oznaki za razliko koordinat sta podani brez znaka Δ , da se ne zamenja s pravim pogreškom.)

- Izračun koordinat točke $C(y_C, x_C)$:

$$y_C = y_B + y_B^C \quad x_C = x_B + x_B^C$$

Če sedaj vse skupaj sestavimo in zapišemo koordinate točke $C(y_C, x_C)$ tako, da bomo na desni strani enačaja imeli samo osnovne podatke (iz naloge), potem velja:

$$\begin{aligned}y_C &= y_B + d_C \sin \left(\arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ \right) \\x_C &= x_B + d_C \cos \left(\arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ \right)\end{aligned}\tag{1}$$

Zgornji dve enačbi predstavljata izhodišče za izračun rezultatov podane naloge. Rešili pa jo bomo na dva načina, v enem koraku in v dveh korakih. Razlike bodo pojasnjene sproti.

Rešitev v enem koraku:

Izhajamo iz postopka prenosa pravih pogreškov, kot smo ga vajeni:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i , ($i = 1, \dots, n$). Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in vektor pravih pogreškov $\Delta \mathbf{x}$.

Pregledamo, kateri podatki imajo podane prave pogreške in ugotovimo, da jih je 6 ($n = 6$), in sicer; koordinate obeh danih točk A in B ter obe opazovanji v poligonu, priklepni kot β_C in dolžina d_C . Vektorja opazovanj \mathbf{x} in pravih pogreškov $\Delta \mathbf{x}$ sta zato velikosti 6×1 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_C \\ \beta_C \\ y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta d_C \\ \Delta \beta_C \\ \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j , ($j = 1, \dots, m$). Sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .

Naloga od nas zahteva, da izračunamo dve koordinati ($m = 2$) točke C , torej y_C in x_C . Vektor neznank \mathbf{y} je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznancko y_j ($j = 1, \dots, m$) določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i ($i = 1, \dots, n$). Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Izhajamo iz obeh enačb 1 za izračun koordinat točke C , torej:

$$y_C = y_B + d_C \sin \left(\arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ \right)$$

$$x_C = x_B + d_C \cos \left(\arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ \right)$$

4. Izračunamo “približne” vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor \mathbf{y} . Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj (\mathbf{x}). Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za smerni kot pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.541 \text{ m} \\ 100\,617.082 \text{ m} \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in šest opazovanj ($n = 6$), je matrika \mathbf{J} dimenzije 2×6 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_C}{\partial d_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial y_C}{\partial y_A} & \frac{\partial y_C}{\partial x_A} & \frac{\partial y_C}{\partial y_B} & \frac{\partial y_C}{\partial x_B} \\ \frac{\partial x_C}{\partial d_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial x_C}{\partial y_A} & \frac{\partial x_C}{\partial x_A} & \frac{\partial x_C}{\partial y_B} & \frac{\partial x_C}{\partial x_B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.44721 & 67.08204 & 0.26833 & 0.53666 & 0.73167 & -0.53666 \\ 0.89443 & -33.54102 & -0.13416 & -0.26833 & 0.13416 & 1.26833 \end{bmatrix}$$

Na kratko o tem, kako se poračunajo parcialni odvodi. Enostavna sta prva dva parcialna odvoda v prvi vrstici, saj velja:

$$\frac{\partial y_C}{\partial d_C} = \sin \nu_B^C \quad \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} = d_C \cos \nu_B^C$$

pri ostalih se pa malo zakomplicira, uporabiti je potrebno ti, “čebulno” pravilo, saj npr. odvod po y_A pomeni prvo odvod \sin , nato \arctan , potem pa še ulomka, kjer je naša spremenljivka v števcu (predznak pa je minus):

$$\frac{\partial y_C}{\partial y_A} = d_C \cos \nu_B^C \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right)^2} \cdot \frac{-1}{x_B - x_A}$$

Podobno se odvaža še po ostalih spremenljivkah, vidi pa se, da se odvodi po vseh štirih koordinatah točk A in B spreminjajo samo po zadnjem členu (preverite sami).

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x}$. Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x}$ in dobimo:

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.037 \text{ m} \\ 0.085 \text{ m} \end{bmatrix}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$.

Na koncu samo še seštejemo:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.504 \text{ m} \\ 100\,617.167 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Rešitev v dveh korakih:

Pri rešitvi v dveh korakih, bomo v prvem koraku izračunali smerni kot ν_A^B in njegov pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B$. V drugem koraku pa bomo izračunali koordinati y_C in x_C ter pripadajoča prava pogreška Δy_C in Δx_C . Kaj s tem pridobimo, ko računamo v dveh korakih? Odvodi obeh koordinat po opazovanjih bodo veliko bolj enostavni.

Korak 1: Izračun ν_A^B in $\Delta\nu_A^B$

Prenos pravih pogreškov za izračunan smerni kot je detajlno opisan v datoteki `Naloga3_gKartPolar.pdf`, ki opisuje primer *Delo od doma: Geodetski kartezični / polarni koordinatni sistem*, zato bomo tu zapisali samo rezultate:

1. Vektorja opazovanj \mathbf{x} in pravih pogreškov $\Delta\mathbf{x}$ sta velikosti 4×1 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$$

2. Vektor neznank \mathbf{y} je:

$$\mathbf{y} = [\nu_A^B]$$

3. Smerni kot ν_A^B se izračuna kot:

$$\nu_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

4. Izračunana neznanka je:

$$\mathbf{y} = \nu_A^B = 116^\circ 33' 54.2''$$

5. Matrika \mathbf{J} je dimenzije 1×4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.004 & 0.008 & -0.004 & -0.008 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \Delta\mathbf{x}$ in dobimo:

$$\Delta\mathbf{y} = \Delta\nu_A^B = -57.8''$$

Končni rezultat koraka 1 je torej: $\nu_A^B = 116^\circ 33' 54.2''$, ki ima pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B = -57.8''$.

Korak 2: Izračun koordinat točke $C(y_C, x_C)$ s pripadajočimi pravih pogreški $(\Delta y_C, \Delta x_C)$

Pri prenosu pravih pogreškov izhajamo iz enačb 1, ki jih lahko poenostavimo, saj smo v koraku 1 izračunali smerni kot ν_A^B in pripadajoč pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B$:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ) \\ x_C &= x_B + d_C \cos(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ) \end{aligned} \quad (2)$$

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i , ($i = 1, \dots, n$). Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in vektor pravih pogreškov $\Delta\mathbf{x}$.

Pogledamo, kaj nastopa v enačbah 2, kar ima podane prave pogreške. Ugotovimo, da jih je 5 ($n = 5$), in sicer; koordinate točke B , smerni kot ν_A^B ter obe opazovanji v poligonu, priklepni kot β_C in dolžina d_C . Vektorja opazovanj \mathbf{x} in pravih pogreškov $\Delta\mathbf{x}$ sta zato velikosti 5×1 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_C \\ \beta_C \\ \nu_A^B \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta d_C \\ \Delta\beta_C \\ \Delta\nu_A^B \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j , ($j = 1, \dots, m$). Sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} .

Naloga od nas še vedno zahteva, da izračunamo koordinati ($m = 2$) točke C , torej y_C in x_C . Vektor neznanek \mathbf{y} je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i ($i = 1, \dots, n$). Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Izhajamo iz obeh enačb 2 za izračun koordinat točke C , torej:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ) \\ x_C &= x_B + d_C \cos(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ) \end{aligned}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznanek y_j in s tem dobimo vektor \mathbf{y} . Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj (\mathbf{x}).

Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznanek (za smerni kot pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.541 \text{ m} \\ 100\,617.082 \text{ m} \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in pet opazovanja ($n = 5$), je matrika \mathbf{J} dimenzije 2×5 in ima obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_C}{\partial d_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \nu_A^B} & \frac{\partial y_C}{\partial y_B} & \frac{\partial y_C}{\partial x_B} \\ \frac{\partial x_C}{\partial d_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \nu_A^B} & \frac{\partial x_C}{\partial y_B} & \frac{\partial x_C}{\partial x_B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.44721 & 67.08204 & 67.08204 & 1 & 0 \\ 0.89443 & -33.54102 & -33.54102 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parcialni odvodi so tu veliko bolj enostavni, po koordinatah sta po zadnja dva v vsaki vrstici. Ker v oklepaju funkcij sin in cos ni več koordinat, je dela veliko manj, kot v primeru, ko vse delamo v enem koraku.

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x}$.

Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x}$ in dobimo:

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.037 \text{ m} \\ 0.085 \text{ m} \end{bmatrix}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}$.

Na koncu samo še seštejemo:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ 433.504 m} \\ 100 \text{ 617.167 m} \end{bmatrix}$$