PRENOS PRAVIH POGREŠKOV – Geodetski kartezični / polarni koordinatni sistem:

Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi pravimi pogreški, in sicer $A(y_A, x_A) = (461\,300\,\mathrm{m}, 100\,600\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_A = 0.1\,\mathrm{m}$, $\Delta x_A = -0.075\,\mathrm{m}$) in $B(y_B, x_B) = (461\,500\,\mathrm{m}, 100\,500\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_B = -0.08\,\mathrm{m}$, $\Delta x_B = 0.05\,\mathrm{m}$). Izračunaj komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, to so: dolžino med točkama d_{AB} in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A. Ker so koordinate točk A in B pogrešene, izračunaj tudi prave pogreške vseh iskanih količin (Δd_{AB}, $\Delta \nu_A^B$ in $\Delta \nu_B^A$) ter njihove prave vrednosti ($\overline{d_{AB}}$, $\overline{\nu_A^B}$ in $\overline{\nu_B^A}$).

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Podana imamo štiri opazovanja $(n = 4)$, vse koordinate obeh točk, zato sta vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ velikosti 4×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati tri neznanke $(m = 3)$, vse tri komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izračun neznank izhaja iz enačb pretvorbe med geodetskim kartezičnim in geodetskim polarnim koordinatnim sistemom. Velja (za oba kota pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$d_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$\nu_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\nu_B^A = \arctan \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).

Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za oba kota pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\_\_^o \\ \_\_\_\_\_\_^o \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
Ker imamo tri neznanke ($m = 3$) in štiri opazovanja ($n = 4$), je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 3×4 in ima obliko (parcialne odvode izpeljite sami za vajo):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta d_{AB} \\ \Delta\nu_A^B \\ \Delta\nu_B^A \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_'' \\ \_\_\_'' \end{bmatrix}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta d_{AB} \\ \Delta\nu_A^B \\ \Delta\nu_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\_\_^o \\ \_\_\_\_\_\_^o \end{bmatrix}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Ali je pravi pogrešek Δd_{AB} odvisen od dolžine d_{AB} med točkama A in B? Če bi razdaljo daljšali/krajšali, ali se s tem spreminja pravi pogrešek d_{AB}? Kako bi to lahko pokazali?
- Ali sta prava pogreška $\Delta\nu_A^B$ in $\Delta\nu_B^A$ odvisna od dolžine d_{AB}? Kako bi to lahko pokazali?
- Kaj lahko rečemo za prava pogreška $\Delta\nu_A^B$ in $\Delta\nu_B^A$? Zakaj imata tako vrednost? Ali bi lahko $\Delta\nu_B^A$ izračunali iz $\Delta\nu_A^B$ in tako imeli v zgornjem računu samo dve neznanki (d_{AB} in ν_A^B) in si s tem prihranili številne račune?