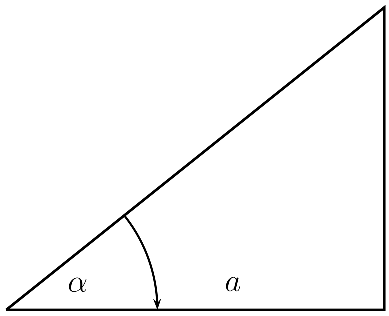
PRENOS PRAVIH POGREŠKOV – Pravokotni trikotnik (povšina in obseg):

Parcela ima obliko pravokotnega trikotnika, kot to prikazuje slika 1. Da bi določili površino S in obseg O parcele, smo opazovali kateto a in kot α ter dobili: $a = 25.00\,\mathrm{m}$ ($\Delta a = -25\,\mathrm{mm}$) in $\alpha = 30°$ ($\Delta\alpha = 2'$). Izračunajte povšino S in obseg O parcele, njuna prava pogreška ΔS in ΔO ter njuni pravi vrednosti $\overline{S}$ in $\overline{O}$.



Slika 1: Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   V navodilih sta podani dve opazovanji, to sta stranica a in kot α, saj imamo za obe opazovanji podana tudi prava pogreška. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta velikosti 2×1. Vanju vstavimo numerične vrednosti opazovanj, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:
   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati površino S in obseg O parcele, zato imamo dve neznanki $(m = 2)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:
   $$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izraziti moramo, kako se obe neznanki izračunata na osnovi opazovanj. Za izračun obeh neznank prvo potrebujemo izračun ostalih dveh stranic, druge katete b (nasproti kota α) in hipotenuze c. Iz definicij kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku lahko ugotovimo, da:
   $$\frac{b}{a} = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad b = a\tan\alpha$$

$$\frac{a}{c} = \cos\alpha \quad \rightarrow \quad c = \frac{a}{\cos\alpha}$$

Izračun obeh neznank je torej dan z:

$$S = \frac{ab(a,\alpha)}{2} \qquad O = a + b(a,\alpha) + c(a,\alpha)$$

V zgornjih enačbah je izredno pomembno, da vemo, da sta obe ostali stranici, b in c, odvisni od obeh opazovanj, a in α, zato moramo enačbi za izračun obeh neznank zapisati tako, da bodo na desni strani enačbe le opazovanja:

$$S = \frac{a^2\tan\alpha}{2}$$

$$O = a + a\tan\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}$$

Tako zapisani enačbi sta končni enačbi, ki sta pomembni zaradi izračunov parcialnih odvodov. Če na desni strani pustimo kakšno izpeljano količino (npr. b), se nam hitro zgodi, da ne odvajamo enačbe pravilno po opazovanjih.

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
Uporabimo numerične vrednosti opazovanj, uporabimo zgornji enačbi za izračun neznank in izračunamo:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2\tan\alpha}{2} \\ a + a\tan\alpha + \frac{a}{\cos\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\mathrm{m}^2 \\ \_\_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
Izračunamo vse parcialne odvode obeh neznank po obeh opazovanjih in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in dve opazovanji ($n = 2$) je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×2 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial a} & \frac{\partial S}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial O}{\partial a} & \frac{\partial O}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

Zelo pomembno je, da je vrstni red opazovanj, po katerih odvajamo v matriki $\mathbf{J}$, enak vrstnemu redu opazovanj iz vektorja $\mathbf{x}$. Parcialni odvodi in matrika $\mathbf{J}$ so:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a\tan\alpha & \frac{a^2}{2\cos^2\alpha} \\ 1 + \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} & \frac{a}{\cos^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta O \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial S}{\partial \alpha}\Delta\alpha \\ \frac{\partial O}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial O}{\partial \alpha}\Delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

Produkte parcialnih odvodov neznanke po opazovanjih in pripadajočih pravih pogreškov opazovanj lahko označimo z $\Delta_a S$, $\Delta_\alpha S$, $\Delta_a O$ in $\Delta_\alpha O$ in predstavljajo doprinose pravega pogreška posameznega opazovanja k pravemu pogrešku obeh neznank. Določeni so z:

$$\Delta_a S = \frac{\partial S}{\partial a}\Delta a = \_\_\mathrm{m}^2 \qquad \Delta_\alpha S = \frac{\partial S}{\partial \alpha}\Delta \alpha = \_\_\mathrm{m}^2$$

$$\Delta_a O = \frac{\partial O}{\partial a}\Delta a = \_\_\mathrm{m} \qquad \Delta_\alpha O = \frac{\partial O}{\partial \alpha}\Delta \alpha = \_\_\mathrm{m}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$