UVOD V MATRIČNO ALGEBRO

Sodobna obdelava geodetskih podatkov se izvaja s pomočjo matematičnih modelov. Večino matematičnih modelov pa lahko predstavimo s sistemom matrik. Zato je v teoriji pogreškov in izravnalnem računu nujno poznavanje osnov matrične algebre.

Matrike je v matematiko prvi uvdel A. CAYLEY 1857. leta. Izpeljave v matrični interpretaciji postanejo mnogo bolj pregledne in rezultati so bolj jasni. Poseben pomen je dobila matrična algebra z uporabo elektronskih računalnikov. Računalniki tudi delujejo na osnovi matrične algebre.

Definicija matrike

Matrika je sistem $m \times n$ števil, ki so razporejena v obliki pravokotnika z m vrsticami in n stolpci. m in n sta naravni števili in predstavljata velikost matrike. Red, velikost, dimenzija matrike je produkt števila vrstic s številom stolpcev matrike: $m \times n$. Matriko zapišemo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ik} predstvlja element matrike $\mathbf{A}$, ki leži v i -ti vrstici in k-tem stolpcu.

Če imamo matriko velikosti 1×1 imenujemo tako matriko skalar.

TIPI MATRIK

1. **Kvadratna matrika**

Kvadratna matrika je matrika z enakim številom stolpcev in vrstic:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

V tem primeru predstavlja število n red matrike $\mathbf{A}$. Elementi a_{ii} predstavljajo elemente glavne diagonale matrike $\mathbf{A}$.

2. **Ničelna matrika**

Matriko v kateri so vsi elementi enaki 0, imenujemo ničelna matrika. Ničelna matrika je lahko pravokotna ali kvadratna.

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

3. **Diagonalna matrika**

Diagonalna matrika je kvadratna matrika, ki ima elemente, ki ležijo izven glavne diagonale enake 0:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}\end{bmatrix}$$

kjer je $d_{ij}=0,\ \ i\neq j$ in $d_{ij}\neq 0,\ \ i=j$, za nekatere ali vse $i=j$.
Diagonalno matriko lahko zapišemo tudi $\mathbf{D}=diag(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$

4. **Skalarna matrika**

Diagonalna matrika v kateri so vsi diagonalni elementi enaki istemu skalarju se imenuje skalarna matrika. Za skalarno matriko velja: $a_{ij}=k,\ \ i=j$ in $a_{ij}=0,\ \ i\neq j$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k & 0 & \dots & 0\\ 0 & k & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & k\end{bmatrix}=diag(k,k,...,k)$$

5. **Enotska ali identična matrika**

Enotska ali identična matrika je diagonalna matrika, ki ima elemente glavne diagonale enake 1. Vedno jo označimo s črko **I**:

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}=diag(1,1,...,1)$$

6. **Trikotna matrika**

Trikotna matrika je kvadratna matrika, ki ima elemente nad (ali pod) glavno diagonalo enake 0. Matrika, ki ima elemente nad glavno diagonalo enake 0 je spodnja trikotna matrika, matrika, ki ima elemente pod glavno diagonalo enake nič je zgornja trikotna matrika.

Zgornja trikotna matrika:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ a_{ij}=0, i>j$$

Spodnja trikotna matrika:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ a_{ij}=0, i<j$$

7. **Simetrična matrika**

Kvadratna matrika je simetrična, če velja a_{ij}=a_{ji}, za vsak i, j.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. **Poševno simetrična matrika**

Kvadratna matrika je poševnosimetrična, če velja a_{ij}=-a_{ji}, za vsak i, j in $a_{ii}=a_{jj}=0$.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Vektorji

Matriko s samo enim stolpcem ali s samo eno vrstico imenujemo vektor. Vektorje označujemo z malimi črkami. Imamo torej vrstične

$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ in stolpične vektorje $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Naziv vektor se običajno nanaša na stolpični vektor. Elemente, ki tvorijo vektor imenujemo tudi komponente vektorja. Z vektorji lahko sestavljamo matrike.

1. **Ničelni vektor**

Enako kot pri ničelni matriki je ničelni vektor tisti, v katerem so vse komponente vektorja enake 0.

2. **Enotski vektor**

Vektor, ki ima en element enak 1 in vse ostale elemente enake 0, imenujemo enotski vektor.

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. **Vektor enic**

Vektor, ki ima vse elemente enake 1, imenujemo vektor enic.

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

MATRIČNE OPERACIJE

1. **Enakost**

Matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, enakih dimenzij sta enaki, če je $a_{ij} = b_{ij}$, za vsak i, j. Matrike različnih dimenzij ne morejo biti enake. Za enakost matrik velja:

$\mathbf{A} = \mathbf{A}$
če je $\mathbf{A} = \mathbf{B}, \ \mathbf{B} = \mathbf{A}$
če je $\mathbf{A} = \mathbf{B}, \ \mathbf{B} = \mathbf{C}$ potem je tudi $\mathbf{A} = \mathbf{C}$

2. **Vsota matrik**

Vsota dveh matrik $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, ki sta enakih dimenzij je matrika $\mathbf{C}$, katere elementi so $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za vsak i in j. Matrik različnih dimenzij ne moremo seštevati. Zakoni, ki veljajo za seštevanje matrik so:

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativni zakon)
$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (asociativnostni zakon)

Z ničelno matriko $\mathbf{O}$ velja še:

$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$
$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$

kjer je matrika $(-\mathbf{A})$ sestavljena iz elementov $(-a_{ij})$.

3. Množenje matrike s skalarjem

Matrika $\mathbf{A}$ pomnožena s skalarjem α je nova matrika $\mathbf{B}$, katere elementi so $b_{ij}=\alpha a_{ij}$, za vsak i in j. Zapišemo lahko:

$\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}$

Za množenje matrik s skalarjem veljajo zakoni:

$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$
$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$
$\alpha(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$
$\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$

4. Transponiranje matrike

Transponirano matriko matrike $\mathbf{A}$, dimenzij $m\times n$, dobimo z zamenjavo vrstic in stolpcev matrike $\mathbf{A}$. Transponirano matriko označimo z $\mathbf{A}^T$. Z zamenjavo vrstic in stolpcev v transponirani matriki postane vrstica i matrike $\mathbf{A}$, stolpec i matrike $\mathbf{A}^T$. Transponirana matrika $\mathbf{A}^T$ ima dimenzije $n\times m$.

Simetrične, diagonalne, skalarne in enotske matrike imajo to lastnost, da velja $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$.

Veljajo tudi naslednje zveze:

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$
$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
$(\alpha\mathbf{A})^T=\alpha\mathbf{A}^T$
$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$

5. Množenje matrik

Produkt matrike $\mathbf{A}$ dimenzije $m\times k$ z elementi a_{ij} in matrike $\mathbf{B}$ dimenzij $k\times n$, z elementi b_{ij}, je matrika $\mathbf{C}$ dimenzij $m\times n$, z elementi c_{ij}. Element c_{ij} je:

$c_{ij}=\sum_{r=1}^{r=k} a_{ir}b_{rj}$, za vsak i in j. To lahko zapišemo tudi:

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}$.

Postopek množenja matrike z matriko lahko s prikažemo s shemo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=k} a_{ir} b_{rj} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Vedeti moramo, da je potrebno za množenje matrik imeti dve matriki ustreznih dimenzij. Število stolpcev prve matrike mora biti enako številu vrstic druge matrike.

Za množenje matrik veljajo naslednje zveze:

$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$

$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{ABC}$ asociativnostni zakon

$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ distributivni zakon

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ distributivni zakon

Zaporedja množenja matrik se moramo striktno držati. V splošnem komutativni zakon ne velja tudi če je množenje matrik (zaradi njunih dimenzij) možno izvesti v obeh smereh:
$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Dodro je vedeti tudi to, da je produkt dveh matrik lahko tudi ničelna matrika.

Koristno je vedeti kaj se zgodi pri množenju kvadratne matrike $\mathbf{A}$ in diagonalne matrike $\mathbf{D}$:

$\mathbf{DA}$ povzroči, da je vsaka vrstica $\mathbf{A}_i$ matrike $\mathbf{A}$, pomnožena z odgovarjajočim elementom d_{ii} matrike $\mathbf{D}$

$\mathbf{AD}$ povzroči, da je vsaka stolpec $\mathbf{A}_j$ matrike $\mathbf{A}$ pomnožen z odgovarjajočim elementom d_{jj} matrike $\mathbf{D}$

Imamo:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ in $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix}$ in $\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix}$

K množenju matrik spada tudi pojem potenciranja diagonalnih matrik z nenegativnimi elementi. Če imamo diagonalno matriko $\mathbf{D}$, elementi $d_{ii} \geq 0$ in skalar $\gamma > 0$, lahko določimo matriko $\mathbf{D}^{\gamma}$:

$$\mathbf{D}^{\gamma} = \begin{bmatrix} d_{11}^{\gamma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{\gamma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Če je $\alpha > 0$ in $\beta > 0$, velja:

$$\mathbf{D}^{\alpha}\mathbf{D}^{\beta} = \mathbf{D}^{(\alpha+\beta)}$$

6. Množenje vektorjev

Dva vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

lahko pomnožimo na dva načina. Produkti

$\mathbf{ab}^T, \mathbf{ba}^T, \mathbf{aa}^T, \mathbf{bb}^T$

se imenujejo diadni produkti. Rezultat takega množenja je kvadratna simetrična matrika dimenzij $n \times n$.

Produkti

$\mathbf{a}^T\mathbf{b}, \mathbf{b}^T\mathbf{a}, \mathbf{a}^T\mathbf{a}, \mathbf{b}^T\mathbf{b}$

se imenujejo skalarni produkti. Rezultat takega množenja je skalar.

Skalarni produkt vektorja $\mathbf{a}$, ki je $\mathbf{a}^T\mathbf{a}$ predstavlja kvadrat dolžine vektorja. Dolžina vektorja $\mathbf{a}$ je torej:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}\cos\varphi$$

Če je skalarni produkt dveh vektorjev enak 0, sta ta vektorja ortogonalna: $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90^{\circ}$.

7. Množenje matrike z vektorjem

Rezultat množenja matrike $\mathbf{A}$ dimenzij $m \times n$, z vektorjem $\mathbf{x}$ dimenzij $n \times 1$ je novi vektor $\mathbf{y}$, dimenzij $m \times 1$:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ oziroma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{y}^T$.

8. Bilinearna in kvadratna forma

Produkt vektorja $\mathbf{y}$ z dimenzijami $m\times 1$, matrike $\mathbf{A}$ z dimenzijami $m\times n$ in vektorja $\mathbf{x}$ z dimenzijami $n\times 1$ se imenuje bilinearna forma:
$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=u$

Če je matrika $\mathbf{A}$ kvadratna matrika in če je $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, imenujemo produkt:
$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=q$
kvadratna forma.

9. Sled matrike

Če je $\mathbf{A}$ kvadratna matrika, je vsota diagonalnih členov skalar, ki ga imenujemo sled matrike $\mathbf{A}$ in jo označimo s:
$sled(\mathbf{A})=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$
Iz same definicije je jasno, da je:
$sled(\mathbf{A})=sled(\mathbf{A})^T$
Če sta matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ enakih dimenzij, ju lahko seštejemo in velja:
$sled(\mathbf{A}+\mathbf{B})=sled(\mathbf{A})+sled(\mathbf{B})$

Sled večkratnega produkta je neodvisna od cikličnih sprememb elementov produkta. Če imamo tri matrike $\mathbf{A}$ dimenzij $m\times n$, $\mathbf{B}$ dimenzij $n\times p$ in $\mathbf{C}$ dimenzij $p\times m$.
$sled(\mathbf{ABC})=sled(\mathbf{CAB})=sled(\mathbf{BCA})$
Čeprav so dimenzije posameznih produktov med seboj različne in sicer: dimenzija prvega produkta je $m\times m$, drugega $p\times p$ in tretjega $n\times n$.

10. Determinanta kvadratne matrike

Vsaka kvadratna matrika ima poleg sledi določen še drugi skalar, ki ga imenujemo determinanta matrike $\mathbf{A}$. Za matriko $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ je determinanta izražena z $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$.
Pozorni moramo biti na oglate oklepaje, ki določajo matriko in dve navpični črti, ki določata determinanto. Determinanto kvadratne matrike dimenzij $n\times n$ označimo z:

$$|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Determinanto reda n kvadratne matrike dimenzij $n\times n$, lahko določimo s pomočjo determinant $n-1$ reda determinant nižjih redov. Pri tem je potrebno vedeti, da je determinanta matrike velikosti 1×1 enaka vrednosti elementa take matrike. Imamo za $\mathbf{A}=[a_{11}]$, $|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}=a_{11}$.
Če v matriki $\mathbf{A}$ dimenzij $n\times n$, brišemo eno vrstico in en stolpec, dobimo podmatriko matrike $\mathbf{A}$. Taka podmatrika matrike $\mathbf{A}$ je dimenzij $(n-1)\times(n-1)$. Determinanto take matrike imenujemo podderminanta ali minor matrike $\mathbf{A}$ in jo označimo z m_{ij}, kjer i in j

predstavljata odgovarjajočo vrstico in stolpec, ki smo ju izbrisali. Bolj natančno lahko rečemo, da je m_{ij} poddeterminanta elementa a_{ij} v matriki $\mathbf{A}$. V matriki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ima vsak element poddeterminanto. Poddeterminanto elementa a_{11}, dobimo tako, da brišemo prvo vrstico in prvi stolpec matrike $\mathbf{A}$ in izračunamo determinanto podmatrike dimenzij 2×2, ki ostane;

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Na enak način sta poddeterminanti:

$m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ in $m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

<u>Kofaktor</u> c_{ij} elementa a_{ij} je definiran z:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

Očitno je, da je v primeru, ko je vsota številk vrstice i in stolpca j sodo število je $c_{ij} = m_{ij}$, ko je vsota $i+j$ liho število je $c_{ij} = -m_{ij}$. Determinanto matrike $\mathbf{A}$ dimenzij $n\times n$ lahko definiramo kot:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + ... + a_{1n}c_{1n}$$

Lahko povemo, da je determinanta matrike $\mathbf{A}$ vsota produktov elementov ene vrstice (ali stolpca) matrike $\mathbf{A}$ in njihovih odgovarjajočih kofaktorjev. Na osnovi te definicije za matriko dimenzij 2×2 velja:

Matrika $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ima kofaktorje $c_{11} = |a_{22}| = a_{22}$ in $c_{12} = -|a_{21}| = -a_{21}$. In determinanta matrike $\mathbf{A}$ je:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Enako dobimo za determinanto matrike $\mathbf{A}$ dimenzij 3×3 determinanto z izrazom:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Enak izraz lahko dobimo tudi s kvadratno shemo.

Nekatere lastnosti determinant omogočajo lažje določitev vrednosti determinante matrike $\mathbf{A}$

1. Determinanta trikotne matrike je enaka produktu diagonalnih členov, enako je determinanta diagonalne matrike je prav tako enaka produktu diagonalnih elementov
2. Determinanta matrike, v kateri je ničelni vektor je enaka 0 (če je ena vrstica ali stolpec enak 0)
3. Determinanta matrike, v kateri sta dva vektorja enaka (vrstici ali stolpca) je enaka 0.
4. Diadni produkt vektorjev ima determinanto enako 0.
5. Determinanti matrike $\mathbf{A}$ in matrike $\mathbf{A}^T$ sta enaki: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$

6. Zamenjava dveh vrstic ali stolpcev v determinanti spremeni predznak determinante
7. Če pomnožimo vrstico ali stolpec v determinanti s skalarjem, se vrednost determinate pomnoži s tem skalrarjem.
8. Vrednost determinante se ne spremeni, če mnogokratnik vrstice ali stolpca prištejemo ali odštejemo od druge vrstice ali stolpca.
9. Determinanta produkta matrik je enaka produktu determinant posameznih matrik $|\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_k| = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\cdots|\mathbf{A}_k|$
10. Če matriko $\mathbf{A}$ lahko razdelimo na trikotno matriko, tako da so na glavni diagonali kvadratne matrike $\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22}, \cdots, \mathbf{A}_{kk}$ potem velja:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22}||\mathbf{A}_{33}|\cdots|\mathbf{A}_{kk}|$$

Če ima deternimanta matrike vrednost 0, imenujemo tako matriko singularna matrika. Če je determinanta matrike različna od 0, imenujemo tako matriko regularna.

Matriko kofaktorjev $\mathbf{C}$ matrike $\mathbf{A}$, imenujemo matriko v kateri je vsak element matrike $\mathbf{A}$ a_{ij} zamenjan z ustreznim kofaktorjem c_{ij}. Matrika kofaktorjev $\mathbf{C}$ je enakih dimenzij kot matrika $\mathbf{A}$.

11. **Inverzna matrika**

Operacija deljenja matrik ni definirana. Pravzaprav lahko imamo $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, ne da bi imeli $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Posledica tega je, da operacija deljenja matrike z matriko v tem primeru, z matriko $\mathbf{A}$, ni definirano tudi, če $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Imamo npr.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

kjer je očitno, da je $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$. Če izračunamo produkta $\mathbf{AB}$ in $\mathbf{AC}$ dobimo:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$$

Na mestu deljenja matrik je v matričnem računu postavljen pojem <u>inverzne matrike</u>, ki ustreza pojmu obratne vrednosti skalarja. Inverzna matrika kvadratne matrike, je v primeru, da obstaja enolično določena matrika $\mathbf{A}^{-1}$, ki ima naslednje lastnosti:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

kjer je $\mathbf{I}$ enotska matrika. Inverzna matrika je določena samo za regularne matrike, to je tiste, ki imajo $\det|\mathbf{A}| \neq 0$.

Za inverzijo veljajo naslednje lastnosti:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$$

Zadnjič smo rekli, da je produkt dveh neničelnih matrik lahko ničelna matrika. Sedaj lahko povemo še, da mora vsaj ena od matrik $\mathbf{A}$ ali $\mathbf{B}$ biti singularna matrika, da lahko velja $\mathbf{AB} = \mathbf{0}, \mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Torej produkt dveh regularnih matrik ne more biti ničelna matrika.

Inverzno matriko manjših dimenzij (2×2 ali 3×3) lahko enostavno invertiramo s pomočjo determinant. Če je

$|\mathbf{A}|$ - determinanta matrike $\mathbf{A}$

$|\mathbf{A}_{ij}|$ - poddeterminanta, ki jo dobimo z izpustitvijo i -te vrstice in j -tega stolpca v matriki $\mathbf{A}$

izračunamo inverzno matriko po Cramerjevem pravilu:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & |\mathbf{A}_{31}| & -+\cdots \\ -|\mathbf{A}_{12}| & |\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{32}| & +-\cdots \\ |\mathbf{A}_{13}| & -|\mathbf{A}_{23}| & |\mathbf{A}_{33}| & -+\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Za matriko dimenzij 2×2 velja:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Invertiranje matrik različnih oblik

Izračun inverzne matrike kvadratne matrike večjih dimenzij zahteva veliko število računskih operacij, zato je invertiranje dolgotrajno in naporno. Nekatere oblike se da enostavno ali enostavneje invertirati, zato si oglejmo te primere.
Najenostavneje invertiramo diagonalno matriko. Inverzna matrika diagonalne matrike $\mathbf{D}$ je tudi diagonalna matrika $\mathbf{A}$, katere odgovarjajoči diagonalni elementi so obratne vrednosti diagonalnih elementov prvotne matrike. Lahko zapišemo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \qquad a_{ii} = \frac{1}{d_{ii}}$$

Inverzna matrika trikotne matrike ima na glavni diagonali obratne vrednosti elementov prvotne matrike, ostali elementi inverzne matrike se izračunajo po definiciji inverzne matrike.

Inverzna matrika simetrične matrike je tudi simetrična matrika.

Izračun inverzne matrike z razstavitvijo matrike na podmatrike

Pogosto nas v dani matriki zanimajo samo določeni elementi. Matrika, ki jo sestavljajo izbrani elementi se imenuje blok matrika ali podmatrika. Vsako matriko lahko razstavimo na nekaj podmatrik, ki jih prav tako kakor matrike označujemo z velikimi črkami in odgovarjajočim indeksom. Nesingularno matriko $\mathbf{A}$ dimenzij $n\times n$ razdelimo v obliko:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s & m \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{c} s \\ m \end{array} \end{array}$$

kjer je $\mathbf{A}_{11} \to s \times s, \mathbf{A}_{12} \to s \times m, \mathbf{A}_{21} \to m \times s, \mathbf{A}_{22} \to m \times m$ in $s + m = n$. Inverzna matrika $\mathbf{A}^{-1}$ obstaja in jo označimo v odgovorajoči na podmatrike razdeljeni obliki:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Iz osnovne definicije inverzije imamo $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$, ali v obliki podmatrik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki:

$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \mathbf{I}_s$ 1.
$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \mathbf{0}$ 2.
$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = \mathbf{0}$ 3.
$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = \mathbf{I}_m$ 4.

Iz tretje enačbe lahko določimo

$$\mathbf{B}_{21} = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}$$

Vstavimo v enačbo 1., dobimo vrednost za $\mathbf{B}_{11}$:

$$\mathbf{B}_{11} = \left[\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right]^{-1}$$

Iz enačbe 4. imamo:

$$\mathbf{B}_{22} = \mathbf{A}_{22}^{-1} - \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}$$

kar z enačbo 2. in enačbo za $\mathbf{B}_{11}$ daje izraz:

$$\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}$$

Tako smo dobili vse podmatrike inverzne matrike $\mathbf{B}$, razdeljene na podmatrike.
Če je matrika $\mathbf{A}$ simetrična matrika je $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T$ in odgovarjajoče tudi $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{12}^T$. Z razdelitvijo matrike na podmatrike lahko izračunamo po eno strani inverzne podmatrike samo tistega dela originalne matrike $\mathbf{A}$, ki nas zanima, po drugi strani pa smo direktno računali inverzno matriko podmatrike $\mathbf{A}_{22}$, ki je v vsakem primeru manjših dimenzij od originalne matrike $\mathbf{A}$. Če na primer izberemo za m vrednost 1 je inverzna matrika $\mathbf{A}_{22}^{-1}$ kar obratna vrednost skalarja. Inverzno matriko lahko odgovarjajoče danim izrazom določimo tudi z razdelitvijo na več kakor štiri podmatrike.

12. **Rang matrike**

Rang matrike $\mathbf{A}$ je definiran kot red največje deteminante različne od 0, ki jo lahko sestavimo iz matrike $\mathbf{A}$, z odgovarjajočim brisanjem vrstic ali stolpcev. Matrika $\mathbf{A}$ ima rang m, edino če ima najmanj eno nesingularno podmatriko reda m in če nima nesingularne podmatrike reda višjega od m.

Rang lahko definiramo tudi drugače (pomeni pa isto):
Matrika $\mathbf{A}$, z dimenzijama $m \times n$ je sestavljena iz n stolpičnih vektorjev:
$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad\quad \mathbf{a}_n]$
Ti vektorji so linearno odvisni, če velja enačba:
$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = 0$
kjer so c_i poljubne konstante. Če gornja enačba velja samo za $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, so ti vektorji med seboj linearno neodvisni. Število med seboj linearno neodvisnih vektorjev imenujemo rang matrike, ki ga označimo z $r(\mathbf{A})$. Število med seboj linearno odvisnih vektorjev imenujemo defekt ranga ali defekt matrike in ga označimo s črko d. Velja torej $r + d = n$.

Pravila, ki veljajo za rang matrike:

1. Pravokotna matrika ima rang, ki je manjši ali enak manjši dimenziji matrike. Matrika $\mathbf{A}$, dimenzij $m \times n$, kjer velja $n < m$ ima rang $r(\mathbf{A}) \le n$.
2. Število linearno neodvisnih vrstic neke matrike $\mathbf{A}$, dimenzij $m \times n$ je enako številu linearno neodvisnih stolpcev. Rang matrike po vrsticah je enak rangu matrike po stolpcih. Rang pa ne more biti večji od manjše dimenzije matrike: $r(\mathbf{A}) \le m, n$.
3. Kvadratna matrika $\mathbf{A}$ reda $n \times n$, ki ima ima $r(\mathbf{A}) = n$ je regularna. V takem primeru ima matrika $\det \mathbf{A} \ne 0$ in jo lahko invertiramo.
4. Kvadratna matrika $\mathbf{A}$, dimenzij $n \times n$, ki ima $r(\mathbf{A}) < n$ je singularna. V takem primeru ima matrika $\det \mathbf{A} = 0$ in je ne moremo invertirati. Singularna matrika ima defekt $d = n - r(\mathbf{A})$.
5. Pravokotna matrika dimenzij $m \times n$, pri kateri je $m > n$, je regularna po stolpcih, če je $r(\mathbf{A}) = n$. Istočasno taka matrika ne more biti regularna po vrsticah.
6. Pravokotna matrika dimenzij $m \times n$, pri kateri je $m < n$, je regularna po vrsticah, če je $r(\mathbf{A}) = m$. Taka matrika ne more biti istočasno regularna po stolpcih.
7. Rang matrike dobljene s produktom matrik, ne more preseči najmanjšega ranga posameznih množiteljev:
   $rang(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_k) \le \min[rang(\mathbf{A}_1), rang(\mathbf{A}_2), \cdots, rang(\mathbf{A}_k)]$
8. Če imamo dve matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, z dimenzijama $m \times k$ in $k \times n$, obe z rangom k, bo produkt matrik $\mathbf{AB}$ imel tudi rang $r(\mathbf{AB}) = k$.
9. Če ima matrika $\mathbf{A}$, dimenzij $m \times n$ rang $r(\mathbf{A}) = n$, bo produkt $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ dimenzij $n \times n$ regularna matrika ranga $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = n$, produkt $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ bo singularna matrika dimenzij $m \times m$ prav tako ranga $r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = n$.
10. Produkt $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ bo regularna matrika, če je $\mathbf{P}$ regularna matrika.
11. Rang vsote dveh matrik ne more preseči vsote posameznih rangov obeh matrik.
12. Diadni produkt vektorja $\mathbf{a}$, z dimenzijo $m \times 1$ in vektorja $\mathbf{b}$ z dimenzijo $n \times 1$, je singularna matrika $\mathbf{C}$, $\mathbf{ab}^T = \mathbf{C}$, z rangom $r(\mathbf{ab}^T) = r(\mathbf{C}) = 1$
13. Matrika z ničelnim rangom $r(\mathbf{A}) = 0$ mora imeti vse elemente enake 0.

Za določitev ranga matrike uporabljamo pravila, ki veljajo za določitev determinante matrike $\mathbf{A}$.

13. **Lastne vrednosti in lastni vektorji matrike**

Za kvadratno matriko $\mathbf{A}$ reda n, določamo neničelni vektor $\mathbf{x}$ in skalar λ, tako ,da velja:
$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ 1.
To nalogo imenujemo problem lastnih vrednosti matrike $\mathbf{A}$. Rešitev naloge je lastna vrednost λ in lastni vektor $\mathbf{x}$.
Gornjo enačbo lahko zapišemo tudi v obliki:
$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 2.

kjer je

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \qquad 3.$$

karakteristična matrika. Enačba 2. predstavlja sistem homogenih linearnih enačb. Netrivialno rešitev homogenega sistema linearnih enačb $(\mathbf{x} \neq 0)$ dobimo, če velja:
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{x}) = 0$ 4.
Izraz 4. imenujemo karakteristična enačba in jo lahko izrazimo v obliki polinoma n-te stopnje, ki ga zapišemo:
$b_n(-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$

kjer je:
$b_n = 1$
$b_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = sled(\mathbf{A})$
$\vdots$
$b_{n-r} =$ vsota vseh glavnih poddeterminant matrike $\mathbf{A}$ dimenzij $r \times r$
$\vdots$
$b_0 = \det \mathbf{A}$

Polinom n-te stopnje ima n korenov ali n rešitev. Teh n rešitev predstavlja n lastnih vrednosti $\lambda_i (i = 1,2,...,n)$ matrike $\mathbf{A}$. Za te vrednosti velja netrivialna rešitev $(\mathbf{x} \neq 0)$ problema lastnih vrednosti matrik. Za lastne vrednosti λ_i, dobimo z rešitvijo sistema linearnih enačb:
$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$
lastne vektorje $\mathbf{x}_i (i = 1,2,...,n)$. Za vsako lastno vrednost λ_i dobimo en lastni vektor. V splošnem so lastne vrednosti ali kompleksna ali realna števila in lastni vektorji ali kompleksni ali realni.
Če posamezne lastne vrednosti λ_i vstavimo v enačbo $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dobimo odgovarjajoči lastni vektor $\mathbf{x}_i$. Karakteristična matrika $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ je singularna, njen rang je lahko različen.

Če uvrstimo vse lastne vrednosti v matriko:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

imenujemo tako matriko spektralna matrika. Če uvrstimo vse lastne vektorje v matriko

$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_n]$

imenujemo tako matriko modalna matrika.

Problem lastnih vrednosti lahko z modalno in spektralno matriko zapišemo tudi na drugačen način:

$\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda}$

Matrika $\mathbf{S}$ je regularna, za matriko Λ pa velja

$\det \mathbf{A} = \det \Lambda; \quad sled(\mathbf{A}) = sled(\Lambda)$

Za lastne vrednosti in lastne vektorje veljajo pravila:

- simetrična matrika $\mathbf{A}$, dimenzij $n \times n$, katere elementi so realna števila ima vse lastne vrednosti in lastne vektorje realne. Lastni vektorji simetrične matrike so med seboj ortogonalni:
  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$
- Če je $\det \mathbf{A} = 0$, bo imela matrika $\mathbf{A}$ najmanj eno lastno vrednost. Za matriko, ki ima defekt d bo d lastnih vrednosti enakih 0.
- Lastni vektorji različnih lastnih vrednosti, so linearno neodvisni.

Primer:
Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike simetrične matrike.
(Za simetrično matriko smo rekli, da so vse lastne vrednosti realne in lastni vektorji med seboj ortogonalni)

Matrika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Karakteristični polinom:

$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

iz česar sledita lastni vrednosti:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

Za $\lambda_1 = -1$ imamo:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$

Oziroma lastni vektor $\mathbf{x}_1 = (1, -1)$

Za $\lambda_1 = 3$ imamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

Oziroma lastni vektor $\mathbf{x}_2 = (1,1)$

Ta dva vektorja sta ortogonalna, ker velja:

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 = 1 - 1 = 0$$

Lastne vektorje običajno noramliziramo. Za normalizirani vektor velja $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1$. Dobimo pa ga tako, da komponente vektorja delimo z dolžino vektorja. Normalizirani lastni vektor $\mathbf{x}_1$ je:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

in normalizirani lastni vektor $\mathbf{x}_2$ je:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Spektralna matrika $\mathbf{S}$ je:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

in modalna matrika Λ:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vidimo, da velja enakost $\mathbf{AS} = \mathbf{S}\Lambda$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

14. **Pozitivno definitna matrika**

Zadnjič smo omenili kvadratno formo. Rekli smo, da je:

$$v = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

kvadratna forma, če je matrika $\mathbf{A}$ kvadratna in simetrična.

Matrika $\mathbf{A}$ je pozitivno definitna, če je $v > 0$ za vsak $\mathbf{x} \neq 0$. Pozitivno definitno matriko zapišemo $\mathbf{A} > \mathbf{0}$.

Za pozitivno definitno matriko $\mathbf{A}$ je zadostni in potrebni pogoj, da so vrednosti vseh glavnih poddeterminant matrike $\mathbf{A}$ >0:

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ \det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| > 0.$$

Matrika $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

je pozitivno definitna, ker je:

$$a_{11} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ in}$$

$$|\mathbf{B}| = \det(\mathbf{B}) = 3(11) + 2(-9) + 1(-5) = 10 > 0$$

Kvadratna forma v dvodimenzionalnem primeru v splošnem predstavlja krivuljo druge vrste. V dvodimenzionalnem primeru imamo:

$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = b$, matrika $\mathbf{A}$ je simetrična. Imamo:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b$$

To lahko zapišemo:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = b$$

Enačba kvadratne forme je v primeru pozitivno definitne matrike elipsa, ki ima svoji osi nagnjeni proti koordinatnemu sistemu. V geodeziji je za oceno natančnosti položaja uporabna t.i. elipsa pogreškov, ki jo predstavlja kvadratna forma.

15. **Odvajanje matrik**

1. Če imamo dan vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, katerega elementi so funkcije neke druge spremenljivke u, je odvod $\dfrac{d\mathbf{x}}{du}$ dan z:

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{du} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{du} \end{bmatrix}$$

Diferencialna sprememba vrednosti $d\mathbf{x}$ vektorja $\mathbf{x}$, je definirana kot:

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

2. Če so elementi matrike $\mathbf{A}_{mn}$ funkcije (skalarne) spremenljivke u, je odvod $\dfrac{d\mathbf{A}}{du}$ dan z:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}_{m,n} = \begin{bmatrix} \dfrac{da_{11}}{du} & \cdots & \dfrac{da_{1n}}{du} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{da_{m1}}{du} & \cdots & \dfrac{da_{mn}}{du} \end{bmatrix}$$

3. Če vektor $\mathbf{y}_{m,1}$ predstavlja m funkcij, ki so funkcije vektorja $\mathbf{x}_{n,1}$, je totalni diferencial vektorja $\mathbf{y}$ dan z:

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

Totalna diferenciala $d\mathbf{x}$ in $d\mathbf{y}$, izhajata iz definicije dane zgoraj. Parcialni odvod $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ je matrika dimenzij $m \times n$ imenujemo tako matriko Jacobijeva matrika in je definirana z:

$$\mathbf{J}_{yx} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Primer:

Imamo vektor $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ kjer je $y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3^2$ in $y_2 = 7 - 2x_2^2 + 5x_3$.

Jacobijeva matrika:

$$\mathbf{J}_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6x_3 \\ 0 & -4x_2 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Odvod kvadratne forme

Imamo kvadratno formo $u = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, kjer je $\mathbf{A}$ neodvisen od $\mathbf{x}$. Odvod kvadratne forme po $\mathbf{x}$:

$$u = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

To lahko zapišemo: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots$

Imamo torej:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_n = 2\mathbf{x}^T \mathbf{a}_1$$

kjer je $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ prvi stolpec matrike $\mathbf{A}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \ldots + 2a_{2n}x_n = 2\mathbf{x}^T \mathbf{a}_2$$

kjer je $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$ drugi stolpec matrike $\mathbf{A}$ in tako naprej.

Imamo torej:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{x}^T \mathbf{a}_1 & 2\mathbf{x}^T \mathbf{a}_2 & \cdots & 2\mathbf{x}^T \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = 2\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}$$

Lahko pa enostavno odvajamo najprej po prvem vektorju $\mathbf{x}$ in nato še po drugem vektorju $\mathbf{x}$ v kvadratni formi:

$$\frac{\partial u}{d\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A},$$

ker je $\mathbf{A}$ simetrična matrika.