UVOD

GEODETSKE METODE

TABELA ODVODOV ELEMENTARNIH FUNKCIJ:

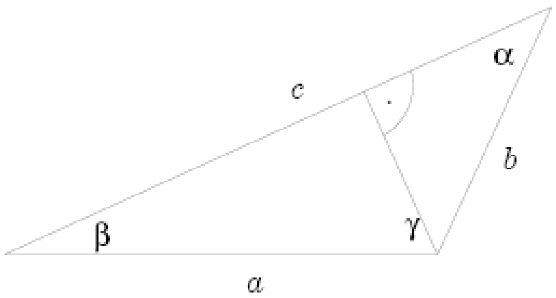
f(x)	**f '(x)**
C (konstanta)	*0*
Cx	*C*
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$1/x$	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arc\cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

TABELA OSNOVNIH PRAVIL ODVAJANJA:

PRAVILO	ODVOD
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
$f(g(h(x)))$	$f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
$f^{-1}(f(x)) = x$	$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

RAVNINSKA TRIGONOMETRIJA

TRIKOTNIK:
Splošni trikotnik je podan tako, da določimo njegovo obliko in velikost. Rešitev splošnega trikotnika pomeni izračun vseh 6-ih elementov trikotnika. Trikotnik lahko rešimo, če imamo podane tri (medseboj neodvisne) količine v trikotniku. Podane so lahko vse tri stranice, dve stranici in en kot in ena stranica ter dva kota. Podani trije koti niso dovolj za rešitev trikotnika, saj dejansko predstavljajo le 2 neodvisna elementa, tretji je linearna kombinacija ostalih dveh ($\gamma = 180° - \alpha - \beta$). Rešitev trikotnika predstavlja poznavanje vseh 6 elementov trikotnika. Pri trikotniku torej velja: $n_0 = 3$ (n_0 minimalno število (medseboj neodvisnih) količin za rešitev modela)



R – polmer očrtanega kroga
r – polmer včrtanega kroga
$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

V splošnem trikotniku veljajo številni izreki:

1. SINUSNI IZREK:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

2. KOSINUSNI IZREK:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

3. TANGENSNI IZREK:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

4. MOLLWEIDOVE ENAČBE:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

5. OSTALI OBRAZCI V SPLOŠNEM TRIKOTNIKU:
   - Heronov obrazec:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

   - Ploščina trikotnika:

$$P=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\tfrac{1}{2}ac\sin\beta \qquad P=\frac{abc}{4R} \qquad P=s.r$$

   - Polmer očrtanega kroga:

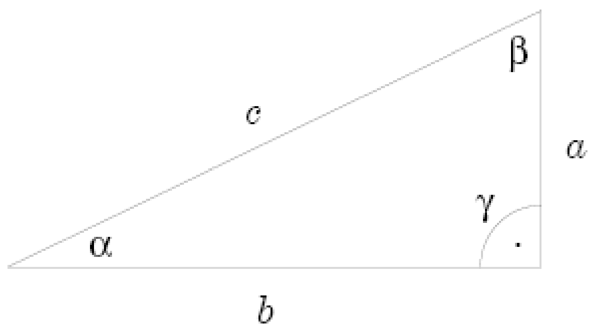
$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

   - Polmer včrtanega kroga:

$$r=\frac{P}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Posebna vrsta trikotnika je PRAVOKOTNI TRIKOTNIK:

a, b – kateti
c - hipotenuza



V pravokotnem trikotniku veljajo naslednji izrazi:

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta$$
$$b=c\sin\beta=c\cos\alpha$$
$$a=b\tan\alpha=b\cot\beta$$

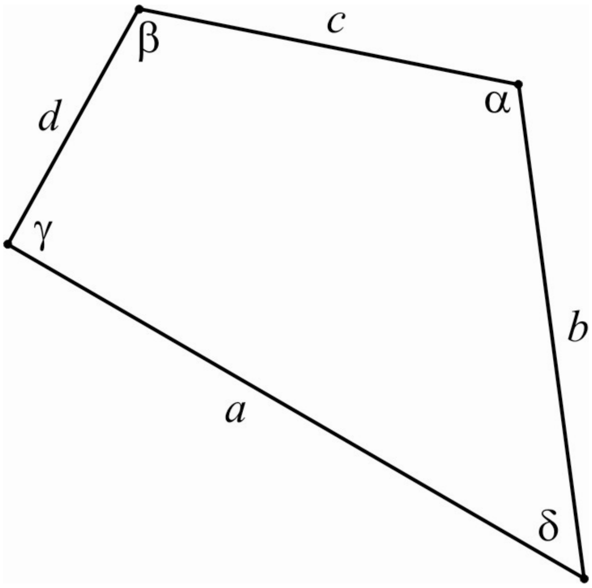
Pravokotni trikotnik je določen z dvema elementoma, torej obstaja $\binom{5}{2} = 10$ različnih možnosti, vendar pa te medseboj niso neodvisne. En ostri kot določa drugega, tako da obstajajo samo 4 različne naloge:

1. dani *c, a*
2. dani *a, b*
3. dani *c*, α
4. dani *a*, α

ČETVEROKOTNIK:

Za rešitev splošnega četverokotnika potrebujemo točno 5 medseboj neodvisnih elementov. Med temi elementi ne (morejo) smejo biti vsi koti. Število vseh elementov splošnega četverokotnika je 8, 4 stranice in 4 koti.

$n_0 = 5$



Splošni četverokotnik se rešuje tako, da se ga razdeli na dva trikotnika in se nato reši vsak trikotnik posebej. Ta trikotnika sta splošna trikotnika, ki imata eno skupno stranico.

Posebne oblike četverokotnika:

- kvadrat (je določen s stranico *a*): $n_0 = 1$
- pravokotnik (je določen z dvema stranicama, *a* in *b*): $n_0 = 2$
- romb (je določen s stranico *a* in kotom nagiba α): $n_0 = 2$
- paralelogram (je določen s stranicama *a* in *b*, ter kotom nagiba α): $n_0 = 3$

MNOGOKOTNIK:

Obravnava mnogokotnikov kot cele objekte je težavna, zato se jih razdeli na trikotnike in rešujemo vsak trikotnik posebej. Sestavimo torej trikotniško shemo.

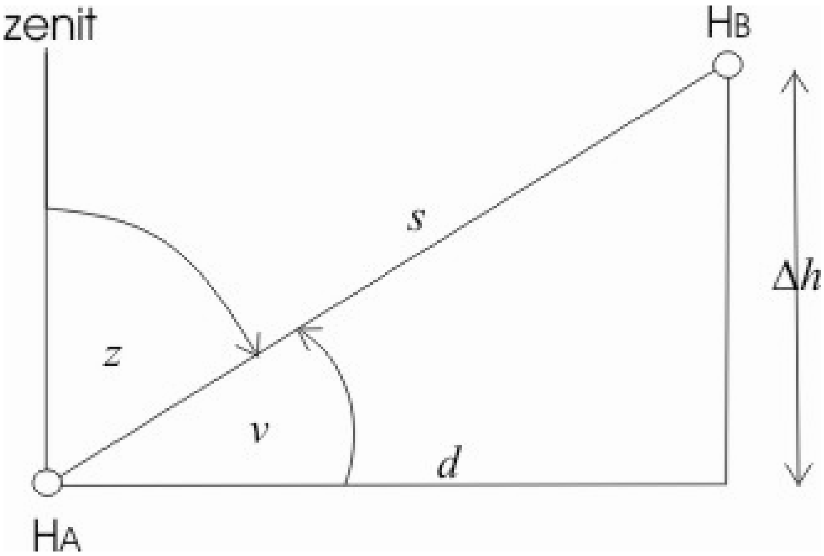
V primeru, ko imamo mnogokotnik določen preko *n* točki/ogljišč, ki imajo določene koordinate v nekem koordinatnem sistemu (npr. x – abscisa in y ordinata), lahko površino mnogokotnika določimo kot:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) \ldots + (x_n - x_1)(y_n + y_1) \right]$$

Pogoj je le, da si točke sledijo zaporedno v nasprotni smeri urinega kazalca. Če si točke sledijo v smeri urinega kazalca, potem dobimo negativno vrednost površine.

GEODETSKE METODE IZMERE

TRIGONOMETRIČNO VIŠINOMERSTVO:
Trigonometrično višinomerstvo je postopek določanja višinskih razlik med točkami. Na osnovi višinskih razlik (in poznane višine vsaj ene točke) lahko tako določimo višine novim točkam. Pri trigonometričnem višinomerstvu merimo en kot in eno dolžino. Kot je lahko višinski kot *v* ali zenitna razdalja *z*. Dolžina je lahko poševna *s* ali horizontalna *d*.



Iz slike je razvidno, da za višinski kot *v* in zenitno razdaljo *z* velja:

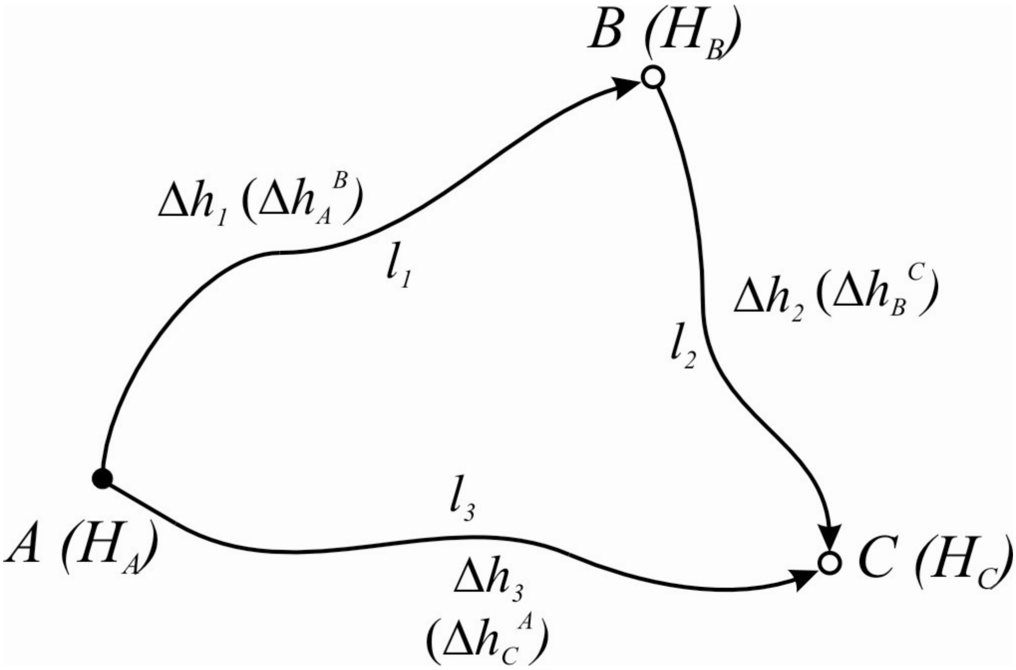
$$z + v = 90°$$

Določitev višinske razlike temelji na rešitvi pravokotnega trikotnika, in sicer:

$$H_B = H_A + \Delta h \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} H_B &= H_A + d \cdot \cot(z) \\ H_B &= H_A + d \cdot \tan(v) \\ H_B &= H_A + s \cdot \sin(v) \\ H_B &= H_A + s \cdot \cos(z) \end{aligned}$$

GEOMETRIČNI NIVELMAN:

Geometrični nivelman je postopek določevanja višin novim točkam. Neposredno merimo višinske razlike Δh_i in dolžine nivelmanskih linij l_i.



Novim točkam (npr. B in C) določimo višine kot:

$$H_B = H_A + \Delta h_A{}^B$$

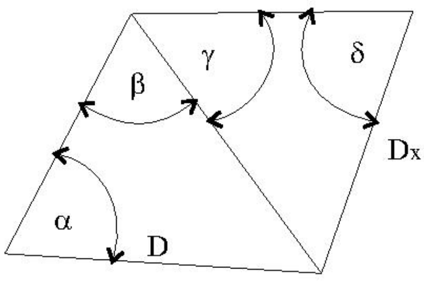
$$H_C = H_B + \Delta h_B{}^C = H_A + \Delta h_A{}^C$$

Geometrični nivelman je eden izmed redkih postopkov v geodeziji, kjer so neznanke (višine točk) v linearni povezavi z opazovanji (višinske razlike).

TRIANGULACIJA IN TRILATERACIJA:

Postopek določevanja ravninskih koordinat (y, x ali E, N) novim točkam na osnovi opazovanih smeri (kotov) in dolžin se imenuje TRIANGULACIJA ali TRILATERACIJA. Triangulacija pomeni določitev koordinat na osnovi merjenih smeri (kotov), medtem ko trilateracija pomeni določevanje koordinat na osnovi dolžin. Kadar v neki mreži geodetskih točk opazujemo tako dolžine kot smeri, tako mrežo imenujemo KOMBINIRANA MREŽA.

Najbolj preprost primer triangulacije je splošni geodetski četverokotnik. Le-tega razdelimo na dva trikotnika in rešimo vsak trikotnik posebej.



SATELITSKA GEODEZIJA – GNSS:

V zadnjih 20-tih letih so se začeli postopki določevanja prostorskih koordinat točk na osnovi satelitskih opazovanj vedno bolj uporabljati tudi v geodetski stroki. GNSS predstavlja kratico za Global Navigation Satellite Systems (Globalni Navigacijski Satelitski Sistemi), kjer po uporabnosti še vedno prednjači GPS (angl. Global Positioning System), vzpostavljen s strani ameriške vlade (popolno operativen od začetka 90-tih let prejšnega stoletja). Poleg GPS poznamo tudi GLONASS (Rusija), Galileo (EU – v izgradnji) in Beidou (Kitajska).

Rezultat izmere z GNSS so prostorski vektorji med točkami. Ti vektorji so predstavljeni v globalnem prostorskem koordinatnem sistemu, kjer je izhodišče tega sistema v težišču Zemlje. Z ustreznimi računskimi postopki lahko vsak prostorski vektor prikažemo tudi v ravnin na površini Zemlje. Če označimo položaj neke dane točke $A(E_A.N_A)$ z radij vektorjem $\boldsymbol{r}_A$ in položaj nove točke $B(E_A.N_A)$ z radij vektorjem $\boldsymbol{r}_B$, potem imamo kot opazovanje podan vektor med točkama $\boldsymbol{r}_A{}^B$. Položaj nove točke B lahko zapišemo kot:

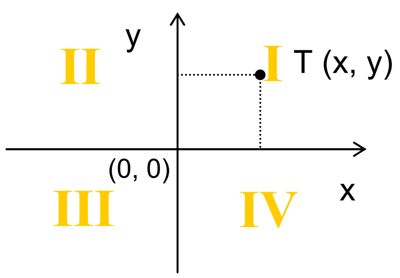
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_A{}^B \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} E_B \\ N_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_A \\ N_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta E_A{}^B \\ \Delta N_A{}^B \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} E_B &= E_A + \Delta E_A{}^B \\ N_B &= N_A + \Delta N_A{}^B \end{aligned}$$

Iz enačb je razvidno, da potrebujemo za določitev dveh neznank (E_B in N_B) dve opazovanji ($\Delta E_A{}^B$ in $\Delta N_A{}^B$). Poleg geometričnega nivelmana je določitev položaja z GNSS edini postopek, kjer so neznanke v linearni povezavi z opazovanji.

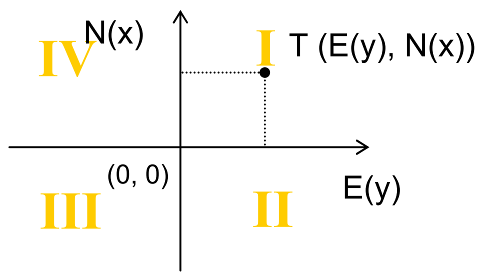
POLARNI GEODETSKI KOORDINATNI SISTEM

V ravnini poznamo dva koordinatna sistema, in sicer:

KARTEZIČNI KOORDINATNI SISTEM:

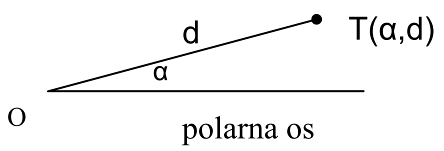


matematični

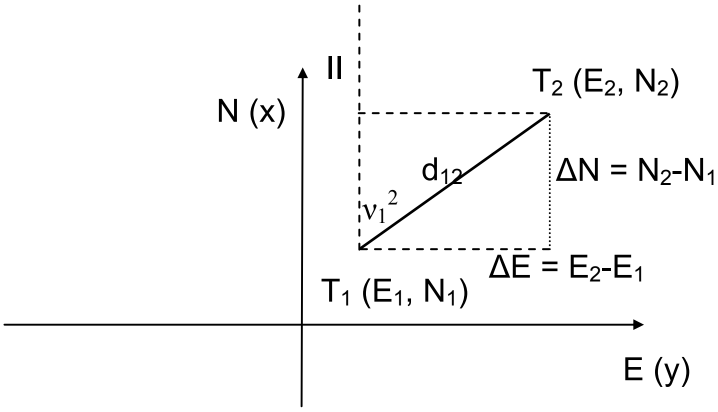


geodetski

POLARNI KOORDINATNI SISTEM:



Matematični polarni koordinatni sistem



Geodetski polarni KS – polarna os predstavlja pozitivno smer N (x)-osi, radij vektor predstavlja razdaljo med dvema točkama.

<u>ZVEZA MED POLARNIMI IN KARTEZIČNIMI KOORDINATAMI v geodetskem KS</u>

1. naloga
Dano: T_1 (E_1, N_1); T_2 (E_2, N_2)
$\mathbf{d_{12}} = \sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2}$ $\mathbf{v_1^2} = a\tan\frac{\Delta E}{\Delta N}$ - smerni kot iz T_1 na T_2

Pri določanju smernega kota med dvema točkama pazi!!! Pomemben je kvadrant v katerem se nahaja smerni kot. Smerni kot ne sme biti negativen ali večji od 360°.

kvadrant	I	II	III	IV
Δy	+	+	-	-
Δx	+	-	-	+
ν	ν	ν + 180°	ν + 180°	ν + 360°

2. naloga
Dano: ν_1^2 - smerni kot iz T_1 na T_2 d_{12} – razdalja med točkama
Določi koordinatno razliko med točkama !!
$\mathbf{\Delta E} = d_{12}\sin(\nu_1^2)$ $\Delta N = d_{12}\cos(\nu_1^2)$

Pomembno !!! $\mathbf{v_2^1 = v_1^2 + 180°}$