

DEFORMACIJSKA ANALIZA

Geofizika v geodeziji

Oskar Sterle

2021/2022

Kazalo vsebine

1	Opredelitev deformacij	1
2	Tenzor velikih deformacij	4
2.1	Lastnosti tenzorjev 2. reda	8
2.2	Geometrijski pomen komponent tenzorja velikih deformacij	9
3	Obravnava majhnih deformacij	12
3.1	Tenzor majhnih deformacij	12
3.2	Tenzor majhnih zasukov	14
4	Ravninsko deformacijsko stanje	16
5	Glavne normalne in glavne strižne deformacije	18
5.1	Glavne normalne deformacije	18
5.2	Glavne strižne deformacije	19
6	Princip homogenih deformacij	20

7	Izračun deformacij iz geodetskih opazovanj	22
---	--	----

	Literatura	27
--	------------	----

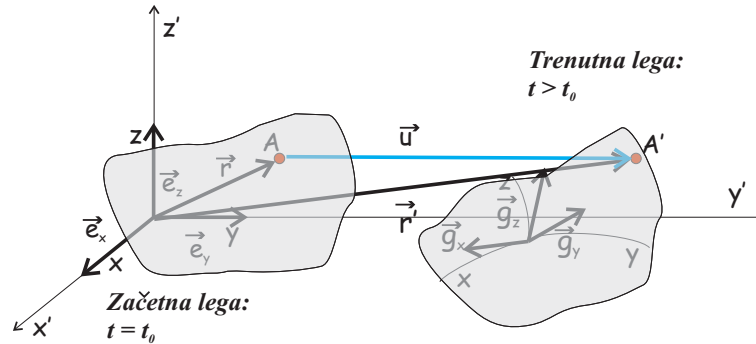
1 Opredelitev deformacij

V nekem trenutku poljubno telo v prostoru zavzema neko lego in obliko. Če na telo deluje zunanja sila, se telo lahko premakne in zasuka. V takem primeru imamo drugačno lego telesa ob enaki obliki. Opis nove lege je možen preko kinematičnih enačb gibanja težišča in zasukov okoli težišča telesa. Če telo ne spremeni oblike, imenujemo telo *togo* ali *nedeformabilno*. V primeru, da zunanja sila ne vpliva le na lego telesa v prostoru, ampak tudi na obliko, potem govorimo o **deformacijah telesa** in telo označimo kot *deformabilno telo*. Vsebina, ki je predstavljena v nadaljevanju je povzeta po dveh učbenikih na področju mehanike trdnih teles [Srpčič \(2003\)](#) in [Stanek in Turk \(2003\)](#), ki sta bili uporabljeni za študij deformacijske analize pri geodetskih nalogah v [Sterle \(2007\)](#).

Gibanje in deformiranje obravnavanega telesa opišemo z dvema koordinatnima sistemoma:

- *Mirujoči pravokotni kartezični koordinatni sistem* z osmi x' , y' in z' . Ta koordinatni sistem je prostorski koordinatni sistem in koordinate x' , y' in z' so prostorske koordinate.
- *Gibajoči in deformabilni pravokotni kartezični koordinatni sistem* z osmi x , y in z . Ta koordinatni sistem je telesni ali materialni koordinatni sistem in koordinate x , y in z so telesne ali materialne koordinate. Koordinatni sistem je na telo pričvrščen in se s telesom deformira.

Slika 1 predstavlja obravnavano telo v začetni ($t = t_0$) in trenutni legi ($t > t_0$). Prostorski koordinatni sistem je postavljen poljubno, medtem ko materialni koordinatni sistem izberemo tako, da le-ta v začetni legi sovпада s prostorskim koordinatnim sistemom. Tako za začetni trenutek t_0 velja $x = x'$, $y = y'$ in $z = z'$.



Slika 1: Prikaz deformabilnega telesa v začetni in trenutni legi

Ko spremljamo lego in obliko nekega delca A na površini ali v notranjosti telesa, ki se v nekem trenutku t premakne v točko A' , vidimo, da je materialni koordinatni sistem pravokoten le v začetnem trenutku, kasneje se deformira skupaj s telesom. V poljubnem času ($t > t_0$) se koordinatne osi x, y in z , ki medseboj niso pravokotne. Položaj točke A' se je v prostorskem koordinatnem sistemu spremenil, medtem ko ostaja v materialnem koordinatnem sistemu enak. Enotski in pravokotni vektorji \vec{e}_x, \vec{e}_y in \vec{e}_z se preoblikujejo v vektorje \vec{g}_x, \vec{g}_y in \vec{g}_z , ki niso več enotski in pravokotni. Imajo smeri tangent na krivulje x, y in z . Tako lahko materialne koordinate vzamemo za oznako delca in gibanje ter deformacije telesa opišemo z **referenčnim opisom**. Pri referenčnem opisu izberemo za neodvisne spremenljivke materialne koordinate telesa x, y in z ter čas t .

V začetni legi telesa ($t = t_0$) je položaj točke A podan preko prostorskih in materialnih koordinat in velja:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_{x'} \quad \vec{e}_y = \vec{e}_{y'} \quad \vec{e}_z = \vec{e}_{z'} \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1)$$

Isti delec ima v poljubnem trenutku ($t > t_0$) položaj, ki je s prostorskimi koordinatami podan kot:

$$\vec{r}^j = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z \quad (2)$$

Povezava med položajem delca v začetni (\vec{r}) in trenutni (\vec{r}^j) legi je podana preko vektorja premika (\vec{u}), kjer velja:

$$\vec{r}^j = \vec{r} + \vec{u} \quad (3)$$

Enačba 3 predstavlja izhodiščno enačbo obravnave gibanja in deformiranja nekega telesa. Glede na referenčni opis gibanja in deformiranja telesa, lahko splošno enačbo gibanja telesa zapišemo kot:

$$\vec{r}^j = f(x, y, z, t) = \vec{r}^j(x, y, z, t) = \vec{r} + \vec{u}(x, y, z, t) \quad (4)$$

Pomembno je, da vidimo, da je vektor premika \vec{u} vektor treh elementov u_x , u_y in u_z , ki so vsi odvisni od štirih parametrov:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, z, t) & u_y(x, y, z, t) & u_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

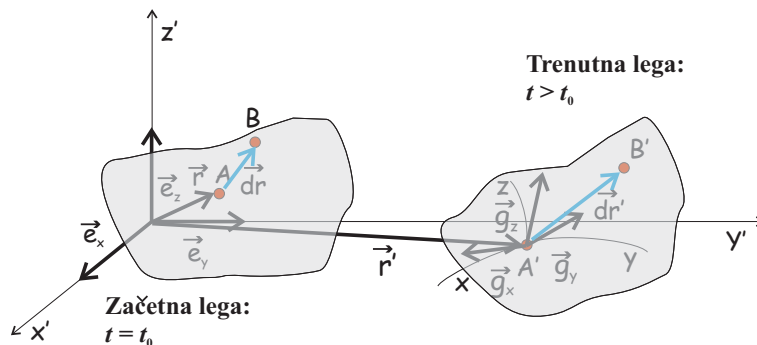
Vse komponente enačb 3, 4 in 5 so funkcije štirih argumentov, materialnih koordinat (x, y, z) in časa (t) , vendar je čas v enačbah izpuščen, saj predstavlja le začetno ali neko trenutno stanje. Če predpostavimo za funkcijo v enačbah 4 in 5 zveznost, odvedljivost in regularnost, kjer se ohranja zveznost narave telesa, potem imamo deformacije trdnih teles, kjer so vse deformacije plastične in zvezne.

V geodeziji se za potrebe določevanja deformacij določenega telesa (antropogenega objekta, naravnega objekta, tektonskih plošč...) vse morebitne premike točk določa glede na ničelno izmero. V tem primeru

poznamo obliko nedeformiranega telesa in premike iščemo s ponovljenimi izmerami in primerjavo glede na ničelno izmero. Tak način opisa deformacij imenujemo **Lagrangev opis** ¹.

2 Tenzor velikih deformacij

V primeru deformacije telesa se položaj poljubnega delca telesa A , ki je v začetni legi podan z radij vektorjem $\vec{r}(x, y, z)$, spremeni v položaj A' , ki se ga opiše z radij vektorjem $\vec{r}'(x', y', z')$. Slika 2 predstavlja položaj delca A in diferencialno območje delca A pred in po deformacijah.



Slika 2: Prikaz diferencialnega območja neke točke A v začetni in trenutni legi

Deformacije opišemo s spremembo razdalje delca B' od delca A' glede na razdaljo med delcema A in B

¹Obstaja tudi t.i. Eulerjev opis, kjer izhajamo iz deformabilnega stanja telesa

pred deformacijami. Delec B ima v začetni legi položaj določen z radij vektorjem $\vec{r}(x + dx, y + dy, z + dz)$. V trenutni legi spremeni svoj položaj v $\vec{r}'(x + dx, y + dy, z + dz)$. Razmerje med točkama A in B ter A' in B' lahko zapišemo preko popolnega diferenciala funkcije več spremenljivk. Za poljubno majhen vektor v začetnem in trenutnem stanju velja:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \\ d\vec{r}' &= \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial z} dz = \vec{g}_x dx + \vec{g}_y dy + \vec{g}_z dz \end{aligned} \quad (6)$$

Glede na obliko enotskih vektorjev iz enačbe 1 lahko drugi del enačbe 6 zapišemo kot:

$$d\vec{r}' = \left(\vec{e}_x + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x} \right) dx + \left(\vec{e}_y + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y} \right) dy + \left(\vec{e}_z + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial z} \right) dz \quad (7)$$

Enačba 7 je posledica enačbe 3, ki povezuje trenutno stanje (\vec{r}') z začetnim stanjem (\vec{r}) preko vektorja premika (\vec{u}), kjer so bazni vektorji \vec{g}_i , $i = (x, y, z)$, enaki:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial i} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \quad (8)$$

Deformiranje telesa se opiše z razliko skalarnih produktov deformiranih (\vec{g}) in nedeformiranih (\vec{e}) vektorjev (razliko dolžin in kotov med njimi pred in po deformacijah). Ker obstajajo trije deformirani ($\vec{g}_x, \vec{g}_y, \vec{g}_z$) in trije nedeformirani vektorji ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), imamo tako $3 \cdot 3 = 9$ različnih možnosti. Tako za poljuben par

lahko zapišemo:

$$\vec{g}_i \vec{g}_j - \vec{e}_i \vec{e}_j = \left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \right) \left(\vec{e}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial j} \right) - \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{u}}{\partial j} \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial j} \quad (9)$$

Če označimo vrednost v enačbi 9 z $2E_{ij}$ in zapišemo skalarno, potem dobimo:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (\vec{g}_i \vec{g}_j - \vec{e}_i \vec{e}_j) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_x}{\partial i} \frac{\partial u_x}{\partial j} + \frac{\partial u_y}{\partial i} \frac{\partial u_y}{\partial j} + \frac{\partial u_z}{\partial i} \frac{\partial u_z}{\partial j} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Oznake indeksov (i, j) predstavljajo koordinate (x, y, z) . Tako obstaja 9 količin: $E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, E_{xy}, E_{xz}, E_{yx}, E_{yz}, E_{zx}$ in E_{zy} , za katere velja:

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
E_{yy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\
E_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = E_{yx} \\
E_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = E_{zx} \\
E_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = E_{zy}
\end{aligned} \tag{11}$$

Elementi, predstavljeni v enačbi 11, predstavljajo 6 neodvisnih elementov tenzorja deformacij. Tako predstavljen tenzor predstavlja tenzor velikih deformacij, saj z njim lahko opišemo poljubne deformacije trdnih teles. Tenzor deformacij je simetričen in ima obliko:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix} \tag{12}$$

2.1 Lastnosti tenzorjev 2. reda

Ker je deformacijski tenzor iz enačbe 12 predstavljen s kvadratno matriko, ga imenujemo **tenzor 2. reda**. Glavna lastnost tenzorja je, da opisuje neko količino (fizikalno, matematično), ki se s premikom in zasukom koordinatnega sistema ne spreminja. **Tenzor 0. reda** je skalar in predstavlja skalarno polje v prostoru. Primer takega polja je lahko temperatura v ozračju, gostota snovi in podobno. Ne glede na tip, izhodišče in orientacijo koordinatnega sistema, v katerem opisujemo npr. temperaturo, se le-ta ne spreminja v odvisnosti od koordinatnega sistema. **Tenzor 1. reda** je stolpična matrika ali vektor in predstavlja neko vektorsko polje v prostoru, kot npr. težnost, hitrost... Tudi težnost je neodvisna od izbire koordinatnega sistema. V različnih koordinatnih sistemih ima različne komponente, a smer in velikost vektorja v prostoru ostajata enaki. Tenzor 2. reda (kot npr. deformacijski tenzor) je predstavljen s kvadratno matriko in se matrično transformira po enačbi:

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}^T \quad (13)$$

Iz enačbe 13 vidimo, da je tudi **variančno-kovariančna matrika** Σ , ki opisuje stohastične lastnosti skupno porazdeljenih slučajnih spremenljivk, tenzor 2. reda. Tenzor se s premikom in zasukom koordinatnega sistema ne spremeni oz. se sama količina, ki jo opisuje tenzor, ne spremeni. Neodvisnost tenzorja od premika se imenuje **translacijska invariantnost**, neodvisnost od zasuka **rotacijska invariantnost**, skupno pa se obe imenujeta **transformacijska invariantnost**. V primeru skalarja, ki je popolnoma neodvisen od koordinatnega sistema, se le-ta imenuje **invariantni tenzor**. V primeru tenzorjev višjega reda se komponente tenzorja z zasukom in premikom koordinatnega sistema spremenijo, ne spremenijo pa se določene funkcije komponent tenzorjev. Te količine imenujemo **invariante tenzorja**. V primeru tenzorja 2. reda, kot sta deformacijski tenzor ali variančno-kovariančna matrika, poznamo tri invariante tenzorja, ki jih označimo z I_1 , I_2 in I_3 in določajo :

- I_1 : sled tenzorja $sl(T)$ ostaja nespremenjena in predstavlja **prvo invarianto** tenzorja 2. reda,
- I_2 : vsota poddeterminant diagonalnih členov ostaja nespremenjena in predstavlja **drugo invarianto** tenzorja 2. reda,
- I_3 : determinanta tenzorja $det(T)$ ostaja nespremenjena in predstavlja **tretjo invarianto** tenzorja 2. reda.

2.2 Geometrijski pomen komponent tenzorja velikih deformacij

Geometrijski pomen tenzorja velikih deformacij lahko pokažemo preko treh sprememb, ki se pojavijo v telesu, podvrženemu deformacijam. Te tri količine so **specifična sprememba dolžine** (geodetsko – sprememba merila), **sprememba smeri materialnih vlaken** (geodetsko – zasuk) in **sprememba pravega kota** (strig). Vse tri geometrijske spremembe opredelimo preko ti. materialnega vlakna, ki predstavlja podmnožico materialnih delcev telesa, ki ležijo na poljubni gladki krivulji in poteka skozi obravnavano točko telesa.

S **specifično spremembo dolžine**, ki jo označimo z D_{ii} ($i = x, y, z$), obravnavamo diferencial vektorja $\vec{dr}_i = di\vec{e}_i$, ki se po deformaciji spremeni v vektor $\vec{dr}'_i = di\vec{g}_i$. Količino D_{ii} definiramo kot spremembo dolžine v smeri koordinate i glede na njeno začetno velikost:

$$D_{ii} = \frac{|\vec{dr}'_i| - |\vec{dr}_i|}{|\vec{dr}_i|} = \frac{dig_i - di}{di} = g_i - 1 \quad (14)$$

Pokazati se da, da predstavljajo diagonalni elementi tenzorja deformacij mero za specifično spremembo

dolžine, saj dobimo:

$$E_{xx} = D_{xx} + \frac{D_{xx}^2}{2} \quad E_{yy} = D_{yy} + \frac{D_{yy}^2}{2} \quad E_{zz} = D_{zz} + \frac{D_{zz}^2}{2} \quad (15)$$

Spremembo smeri materialnih vlaken, ki imajo v začetni legi smer enotskega vektorja \vec{e}_i ($i = x, y, z$), merimo s kotom φ_i med vektorjema \vec{e}_i in \vec{g}_i . Velikost kota φ_i se lahko določi preko vektorskega produkta enotskega vektorja \vec{e}_i in vektorja \vec{g}_i , saj velja:

$$\sin \varphi_i = \frac{|\vec{e}_i \times \vec{g}_i|}{|\vec{e}_i||\vec{g}_i|} = \frac{|\vec{e}_i \times \vec{g}_i|}{|\vec{g}_i|} \quad (16)$$

Kot φ_i predstavlja kot zasuka enotskega vektorja \vec{e}_i v \vec{g}_i , ko je telo podvrženo deformacijam. Smer zasuka se določi preko vektorskega produkta, ki nastopa v števcu enačbe 16, ki se ga označi z \vec{R}_i in ima obliko:

$$\vec{R}_i = \vec{e}_i \times \vec{g}_i = \vec{e}_i \times \left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \right) \quad (17)$$

Glede na lastnosti vektorskega produkta in obliko vektorjev v enačbi 17, lahko za vse tri spremembe smeri materialnih vlaken φ_x , φ_y in φ_z zapišemo:

$$\begin{aligned} \vec{R}_x &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \vec{e}_z \\ \vec{R}_y &= -\frac{\partial u_x}{\partial y} \vec{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial y} \vec{e}_x \\ \vec{R}_z &= -\frac{\partial u_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \vec{e}_y \end{aligned} \quad (18)$$

Velikost spremembe smeri materialnih vlaken se lahko, glede na količine iz enačbe 18 in enačbo 15, zapiše kot:

$$R_i = |\vec{e}_i \times \vec{g}_i| \longrightarrow \sin \varphi_i = \frac{R_i}{g_i} = \frac{R_i}{1 + D_{ii}}, \quad g_i = |\vec{g}_i|, \quad \varphi_i \in [0, \pi] \quad (19)$$

Iz enačbe 19 je razvidno, da mera za spremembo smeri vlaken R_i ni neposredno mera za zasuk materialnega vlakna v obravnavani točki, a se sam zasuk lahko po tej enačbi izračuna.

Spremembo pravega kota med materialnimi vlakni obravnavamo kot odstopanje kota med dvema vektorjema \vec{g}_i in \vec{g}_j , ($i, j = x, y, z$) od pravega kota, ki ga predstavljata odgovarjajoča nedeformirana enotska vektorja \vec{e}_i in \vec{e}_j . Spremembo pravega kota med materialnimi vlakni označimo z D_{ij} in definiramo kot:

$$D_{ij} = \frac{\pi}{2} - \theta_{ij} \quad (20)$$

Spremembo pravega kota med materialnimi vlakni definiramo preko skalarnega produkta deformiranih vektorjev \vec{g}_i in \vec{g}_j , saj po enačbi 10 velja:

$$\vec{g}_i \vec{g}_j = g_i g_j \cos \theta_{ij} = 2E_{ij} \longrightarrow \cos \theta_{ij} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - D_{ij} \right) = \sin D_{ij} \quad (21)$$

Ob upoštevanju lastnosti iz enačb 14 in 21 se lahko zapiše:

$$\begin{aligned} \sin D_{ij} &= \frac{2E_{ij}}{(1 + D_{ii})(1 + D_{jj})} \\ 2E_{ij} &= \sin D_{ij} + D_{ii} \sin D_{ij} + D_{jj} \sin D_{ij} + D_{ii} D_{jj} \sin D_{ij} \end{aligned} \quad (22)$$

Na ta način lahko rečemo, da izvendiagonalni členi tenzorja velikih deformacij predstavljajo mero za spremembo pravega kota med materialnimi vlakni. Enačba 22 se lahko za vse koordinate predstavi kot:

$$\begin{aligned}
 2E_{xy} &= \sin D_{xy} + D_{xx} \sin D_{xy} + D_{yy} \sin D_{xy} + D_{xx} D_{yy} \sin D_{xy} \\
 2E_{xz} &= \sin D_{xz} + D_{xx} \sin D_{xz} + D_{zz} \sin D_{xz} + D_{xx} D_{zz} \sin D_{xz} \\
 2E_{yz} &= \sin D_{yz} + D_{yy} \sin D_{yz} + D_{zz} \sin D_{yz} + D_{yy} D_{zz} \sin D_{yz}
 \end{aligned} \tag{23}$$

3 Obravnava majhnih deformacij

Tenzor velikih deformacij predstavlja poljubno obliko deformacij za neko telo. Vse predhodno zapisane enačbe veljajo za poljubno velike premike točk pri deformiranju. Kadar pa so deformacije majhne glede na telo oz. so vrednosti parcialnih odvodov majhni glede na enoto, torej gre za majhne raztezke, majhne zasuke in majhne spremembe pravih kotov, lahko enačbe zapišemo enostavneje, če zanemarimo produkte ali kvadrate parcialnih odvodov.

3.1 Tenzor majhnih deformacij

V enačbi 10 na strani 6 smo poljuben element tenzorja velikih deformacij E_{ij} zapisali kot:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_x}{\partial i} \frac{\partial u_x}{\partial j} + \frac{\partial u_y}{\partial i} \frac{\partial u_y}{\partial j} + \frac{\partial u_z}{\partial i} \frac{\partial u_z}{\partial j} \right) \tag{24}$$

Če v enačbi 24 zanemarimo produkte parcialnih odvodov, dobimo:

$$\begin{aligned}
 E_{xx} &\approx \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} & E_{xy} = E_{yx} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \\
 E_{yy} &\approx \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} & E_{xz} = E_{zx} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \\
 E_{zz} &\approx \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} & E_{yz} = E_{zy} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Prav tako kot tenzor velikih deformacij, je tudi tenzor malih deformacij simetričen in ga določa 6 neodvisnih elementov, ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ in $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$. Tenzor majhnih deformacij označimo z ε in zapišemo kot:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Enako posplošitev glede produktov in kvadratov parcialnih odvodov izvedemo za vse tri geometrijske lastnosti komponent tenzorja deformacij in ugotovimo:

$$\begin{aligned}
 D_{ii} &\approx E_{ii} \approx \varepsilon_{ii} \\
 D_{ij} &\approx 2E_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij} \\
 \varphi_i &\approx R_i
 \end{aligned} \tag{27}$$

Specifične spremembe dolžin po koordinatnih smereh lahko obravnavamo neposredno preko diagonalnih elementov tenzorja ε , spremembe pravih kotov med koordinatnimi osmi lahko predstavimo z dvakratno

vrednostjo izvendiagonalnih členov tenzorja ε , velikost vektorja R_i pa predstavlja fizikalen zasuk materialnega vlakna v obravnavani točki.

3.2 Tenzor majhnih zasukov

Deformacije nekega telesa predstavljajo premik vsakega delca znotraj ali na površini tega telesa v skladu z lastnostmi te deformacije (v odvisnosti od funkcije \vec{u}). Ta premik se lahko dobi preko integracije diferenciala premika \vec{du} po poljubni krivulji med začetno točko T_0 in trenutno točko T :

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \vec{du} &= \vec{u}(T) - \vec{u}(T_0) \\ &\downarrow \\ \vec{u}(T) &= \vec{u}(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz \right) \end{aligned} \tag{28}$$

Skalarno se enačbo 28 zapiše s tremi členi in velja:

$$\begin{aligned} u_x(T) &= u_x(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right) \\ u_y(T) &= u_y(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \right) \\ u_z(T) &= u_z(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right) \end{aligned} \tag{29}$$

Parcialne odvode, ki nastopajo v enačbah 29, lahko zapišemo kot vsoto dveh členov, kjer velja:

$$\frac{\partial u_j}{\partial i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} - \frac{\partial u_i}{\partial j} \right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (i, j = x, y, z) \quad (30)$$

V enačbi 30 predstavljajo količine ε_{ij} komponente tenzorja malih deformacij, medtem ko predstavljajo količine ω_{ij} :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} - \frac{\partial u_i}{\partial j} \right) = -\omega_{ji} \quad (31)$$

komponente tenzorja majhnih zasukov ω , ki je antisimetričen. Iz enačbe 31 je razvidno, da so diagonalni členi ω_{ii} enaki nič, tako da ima tenzor obliko:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} = -\omega^T \quad (32)$$

Vidno je, da vsebuje tenzor majhnih zasukov samo tri različne količine, ω_{xy} , ω_{xz} in ω_{yz} , ki pa se jih enostavneje zapiše kot:

$$\omega_{xy} = \omega_z \quad \omega_{zx} = \omega_y \quad \omega_{yz} = \omega_x \quad (33)$$

Prvi del enačbe 33 predstavlja zasuk okoli osi z , drugi del zasuk okoli osi y in zadnji del zasuk okoli osi x . Tenzor zasukov ima tako obliko:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} = -\omega^T \quad (34)$$

Tensor malih zasukov se lažje predstavi preko **vektorja zasukov** $\vec{\omega}$, ki ima obliko:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z \quad (35)$$

4 Ravninsko deformacijsko stanje

V nekaterih primerih pa nas zanimajo deformacije v samo dveh razsežnostih. Take deformacije se pojavljajo pri objektih, kjer je ena razsežnosti veliko manjša od ostalih dveh. Kadar obravnavamo premike na Zemeljskem površju na lokalnem območju, predpostavimo, da so premiki v smeri težiščnice ali normale minimalni ali zanemarljivi. V tem primeru določamo samo deformacijsko stanje v ravnini. Vektor premikov \vec{u} ima tako obliko:

$$\vec{u}(x, y) = u_x(x, y) \vec{e}_x + u_y(x, y) \vec{e}_y + c \vec{e}_z \quad (36)$$

Iz enačbe 36 je razvidno, da je premik posamezne točke odvisen le od horizontalnih koordinat in nič od višine točke. Tako deformacijsko stanje se imenuje **ravninsko deformacijsko stanje**. Glede na enačbe 25 lahko definiramo ravninski deformacijski tenzor, ki je velikosti 2×2 in ima obliko:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (37)$$

Na enak način lahko definiramo tenzor majhnih zasukov, kjer, glede na enačbe 30, ostane le še en člen, in sicer $\omega_{xy} = \omega_z$, ki ima obliko:

$$\omega_{xy} = \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (38)$$

Opis deformacij določenega telesa pa ne poteka samo s komponentami tenzorja deformacij, ampak lahko tudi s pomočjo izpeljanih parametrov, kot so :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} && \text{čista strižna deformacija,} \\ \gamma_2 &= 2\varepsilon_{xy} && \text{inženirska strižna deformacija,} \\ s_{2D} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) && \text{raztezanje (sprememba ploskovnega merila).} \end{aligned}$$

Nadalje se lahko izpelje še dodatne količine, ki predstavljajo ekstremne vrednosti deformacij in pripadajoče smeri:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} (= 2\gamma_I) && \text{totalna strižna deformacija,} \\ \varepsilon_{G1} &= s_{2D} + \frac{\gamma}{2} && \text{maksimalna normalna deformacija,} \\ \varepsilon_{G2} &= s_{2D} - \frac{\gamma}{2} && \text{minimalna normalna deformacija,} \\ \tan 2\alpha_{G1} &= \frac{\gamma_2}{-\gamma_1} && \text{azimut smeri } \varepsilon_{G1}, \\ \tan 2\alpha_{G2} &= \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} && \text{azimut smeri } \varepsilon_{G2}, \\ \tan 2\alpha_G &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} && \text{azimut smeri } \gamma. \end{aligned}$$

5 Glavne normalne in glavne strižne deformacije

Deformiranje nekega telesa se dogaja neodvisno od koordinatnega sistema, v katerem te deformacije opišemo. Vendar pa je opis deformacij odvisen od koordinatnega sistema, zato so tudi elementi tenzorja deformacij različni v različnih koordinatnih sistemih. Za neodvisno predstavitev deformacij se tako uporabljajo **glavne normalne** in **glavne strižne deformacije**. Glavne normalne deformacije predstavljajo ekstremne vrednosti specifičnih sprememb dolžin, medtem ko glavne strižne deformacije predstavljajo ekstremne vrednosti sprememb pravih kotov.

5.1 Glavne normalne deformacije

Kadar obravnavamo nek poljuben tenzor deformacij ε , je le-ta v splošnem predstavljen s polno matriko. Če sedaj koordinatni sistem zasukamo tako, da se predstavi tenzor z diagonalno matriko, potem so nove koordinatne osi ravno smeri glavnih normalnih deformacij in vrednosti deformacij v novem tenzorju so vrednosti glavnih normalnih deformacij. Glavne normalne deformacije ε_G se poišče preko lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tenzorja deformacij. V primeru ravninskega stanja, ko je tenzor deformacij velikosti 2×2 , iščemo rešitev determinante:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_G) & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_G) \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

Lastni vrednosti zgornje determinante imata obliko:

$$\varepsilon_{G1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (40)$$

Smeri glavnih normalnih deformacij sta si pravokotni ena na drugo, kjer smer večje izmed glavnih normalnih deformacij dobimo po enačbi (izračunan kot predstavlja matematični kot):

$$\tan 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \quad (41)$$

Enačbi 40 in 41 sta enaki kot pri izračunu parametrov elipse pogreškov. Tudi tu je potrebno kot zasuka α izračunati na enak način kot smerni kot, z upoštevanjem kvadrantov, oziroma z uporabo programske funkcije `atan2[.,.]`.

5.2 Glavne strižne deformacije

Glavne strižne deformacije nastopajo pri kotu:

$$\tan 2\alpha = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\varepsilon_{xy}} \quad (42)$$

Kot glavnih strižnih deformacij je za 45° različen od smeri glavnih normalnih deformacij. Vrednosti obeh ekstremnih strižnih deformacij sta določeni preko kota, podanega v enačbi 42, in imata obliki:

$$\gamma_{I,II} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (43)$$

Če so strižne deformacije v smereh glavnih normalnih deformacij enake nič, pa to ne velja obratno. Vrednosti normalnih deformacij v smeri glavnih strižnih deformacij nista enaki nič, ampak imata vrednost:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \quad (44)$$

Normalne deformacije v smeri ekstremnih strižnih deformacij bi bile enake nič samo ob pogoju $\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy}$.

6 Princip homogenih deformacij

Vektorsko polje premikov na obravnavanem območju (geodetski mreži) pridobimo z razliko položajev (koordinat) geodetskih točk, določenih v dveh (ali več) različnih terminskih izmerah. Vektorsko polje tako ni zvezna, odvedljiva in regularna funkcija, ampak diskreten niz vektorjev, podan na geodetskih točkah mreže. Vektorsko polje in željene lastnosti le-tega dobimo z različnimi načini interpolacije diskretnega niza vektorjev. Največkrat se za določena območja predpostavi homogenost deformacij, kjer na nekem območju predpostavimo, da so deformacije in zasuki tega območja konstantni ($\varepsilon_{ij} = konst.$, $\omega_i = konst.$, $(i, j = x, y, z)$). Vektor premikov $\vec{u}(x, y, z)$ je pri konstantnih deformacijah zvezen, odvedljiv in regularen, zato obstaja totalni diferencial funkcije $\vec{u}(x, y, z)$ in ima obliko:

$$d\vec{u} = \nabla \vec{u} d\vec{r} \quad (45)$$

Enačba 45 ima po komponentah obliko:

$$\begin{aligned}
 du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\
 du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\
 du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz
 \end{aligned} \tag{46}$$

Z integracijo enačb 46 na levi strani dobimo $\int du_i = u_i - u_{i0}$, pri desnih straneh pa upoštevamo, da so deformacije konstantne, tako da se parcialni odvodi lahko predstavijo kot vsota (razlika) ε_{ij} in ω_i (enačba 30) s konstantnimi vrednostmi in integriramo po odgovarjajočih spremenljivkah. Tako lahko premik predstavimo kot:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{x0} + \varepsilon_{xx}x + (\varepsilon_{xy} + \omega_z)y + (\varepsilon_{xz} - \omega_y)z \\
 u_y &= u_{y0} + (\varepsilon_{xy} - \omega_z)x + \varepsilon_{yy}y + (\varepsilon_{yz} + \omega_x)z \\
 u_z &= u_{z0} + (\varepsilon_{xz} + \omega_y)x + (\varepsilon_{yz} - \omega_x)y + \varepsilon_{zz}z
 \end{aligned} \tag{47}$$

Če pri zgornjih enačbah definiramo $u_i = i' - i$ in enačbo predstavimo matrično, lahko zapišemo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \\ u_{z0} \end{bmatrix} + (\varepsilon + \omega + \mathbf{I}_{3 \times 3}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{48}$$

Oblika enačbe 48 je podobna enačbi, ki opisuje 7-parametrično transformacijo v prostoru med dvema koordinatnima sistemoma ($\mathbf{I}_{3 \times 3}$ je enotska matrika). Razlika se nahaja v tenzorju deformacij; z enačbo 48

ocenjujemo tudi deformacije telesa, ne samo premika, zasuka in merila (merilo je zastopano v diagonalnih komponentah ε). Pri homogenih deformacijah telesa enačba 48 opisuje postopek afine transformacije. Pri afini transformaciji se poleg spremembe merila, premika in zasuka ocenjuje tudi stopnjo strižnosti (spremembo pravega kota) med koordinatnimi osmi.

7 Izračun deformacij iz geodetskih opazovanj

Deformacije obravnavanega objekta lahko izračunamo le v primeru, ko imamo izvedeni vsaj dve geodetski izmeri karakterističnih točk objekta. Deformacijske parametre lahko izračunamo v osnovi na dva različna načina, in sicer:

- na osnovi razlik opazovanj med dvema terminskima izmerama in
- na osnovi izračunanih vektorjev premikov (ali hitrosti) geodetskih točk v geodetski mreži.

Izračun **deformacij na osnovi razlik med opazovanji** je bil uporabljen v preteklosti, vzroka pa sta bila predvsem dva. Prvi je bil ta, da se je s tem poskušalo izogniti zagotovitvi geodetskega datuma mreže, saj takrat učinkovita teorija geodetskih mrež ni bila ustrezno definirana. Pri geodetskem datumu moramo vedno privzeti določene informacije kot dane, v tistem času pa teoriji zagotovitve geodetskega datuma z minimalnim številom datumskih parametrov in S-transformacije še nista bili poznani. Dane količine so zagotovile dane točke, s čimer pa smo lahko posegali v geometrijo geodetske mreže. Drugi vzrok pa je bil v tem, da ni bilo na voljo različnih merskih tehnik. Z ustrezno natančnostjo se je lahko merilo le kote, razvoj razdaljemerov je bil takrat še v povojih. A ker opazovani koti nimajo nobene datumske

informacije (merilo, zasuk, premika), je bilo možno z razlikami med koti v dveh terminskih izmerah določiti le strižne deformacije in razlike v normalnih deformacijah (ni podatka o merilu mreže). Geodetsko mrežo se je razdelilo na trikotnike (npr. s postopkom Delauneyeve triangulacije), deformacije pa se je nato izračunalo v okviru posameznega trikotnika ali večkotnika. Z razvojem razdaljemero se je pojavila možnost natančnih izmer dolžin med geodetskimi točkami. Ker dolžine določajo merilo geodetske mreže, je na osnovi ponovljenih dolžinskih opazovanj možno izračunati vse parametre deformacijskega tenzorja. Slaba stran izračuna deformaciji neposredno iz ponovljenih opazovanj izhaja iz tega, da je bilo potrebno v vseh terminskih izmerah izvesti popolnoma enako shemo opazovanj v geodetski mreži. Problem je nastal tudi zaradi razvoja tehnologije, ko se je spremenila merska tehnika ali natančnost izvedenih opazovanj, saj opazovanja niso bila več skladna med terminskimi izmerami.

Z razvojem teorije geodetske mreže, predvsem z razvojem teorije geodetskega datuma v okviru zagotovitve geodetskega datuma z minimalnim številom datumskih parametrov in z razvojem S-transformacije, je bilo možno kakovostno in nepristransko oceniti vektorje premikov geodetskih točk med posameznimi terminskimi izmerami. Pojavila se je teorija deformacijske analize v geodeziji, s katero se je lahko zagotovilo stabilen geodetski datum v geodetski mreži in lociralo nestabilne geodetske točke oziroma premike točk v ponovljenih geodetskih izmerah. Primeri takih deformacijskih metod so metoda Delft, Fredericton, Hannover, Karlsruhe in München. Vse te metode deformacijske analize so predpostavljale terestrična opazovanja v (relativno) majhnih geodetskih mrežah, ki so služile za kontrolo stabilnosti npr. pregrad, viaduktov in podobno.

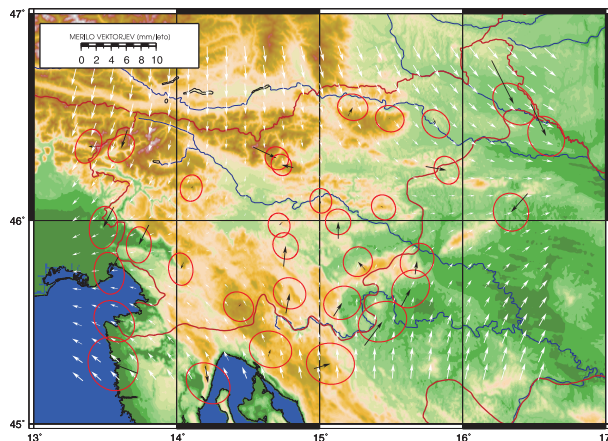
Z razvojem satelitskih tehnik, predvsem GNSS, pa se je pojavila možnost določitve koordinat geodetskim točkam v posamezni terminski izmeri v okviru zelo kakovostnega referenčnega sistema, ki je zagotavljal zelo kakovosten geodetski datum. Izračuni vektorjev hitrosti geodetskih točk (ali premikov) so postali zanesljivi, nepristranski in enostavno dostopni. Velikost geodetskih mrež se je bistveno povečala in

ena izmed najpomembnejših nalog geodezije je bilo spremljanje površja Zemlje in analiza geodinamičnih pojavov skozi daljše časovno obdobje (tektonika litosferskih plošč, post-glacialno dviganje površja, vpliv plimovanja trdne Zemlje, oceanov, atmosfere...).

V primeru, ko deformacije računamo na osnovi izračunanih vektorjev premikov (hitrosti) na geodetskih točkah, izhajamo iz enačb 47 in 48, ki ju za ravninsko stanje za točko i lahko zapišemo kot:

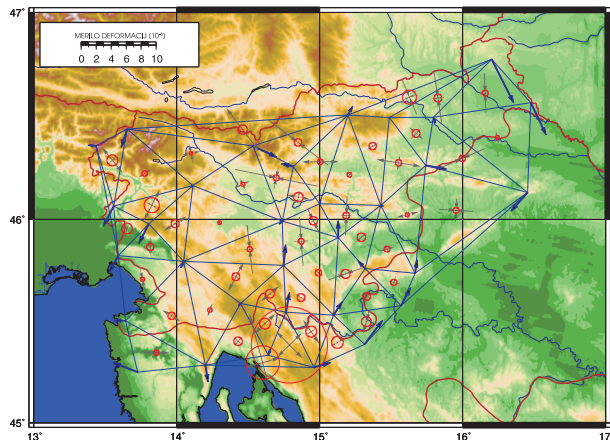
$$\begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{bmatrix} + \left(\overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}}^{\varepsilon} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}^{\omega} \right) \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (49)$$

V enačbi 49 predstavljata v_{x_i} in v_{y_i} komponenti premika (hitrosti) točke, dobljeni razlik položajev dveh terminskih izmer, $v_{x,0}$ in $v_{y,0}$ komponenti premika (hitrosti) celotne geodetske mreže ter p_i in q_i koordinate točke. Enačbo 49 lahko uporabimo za vse točke geodetske mreže, v tem primeru predpostavimo homogene deformacije celotne mreže. Tak primer prikazuje slika 3.

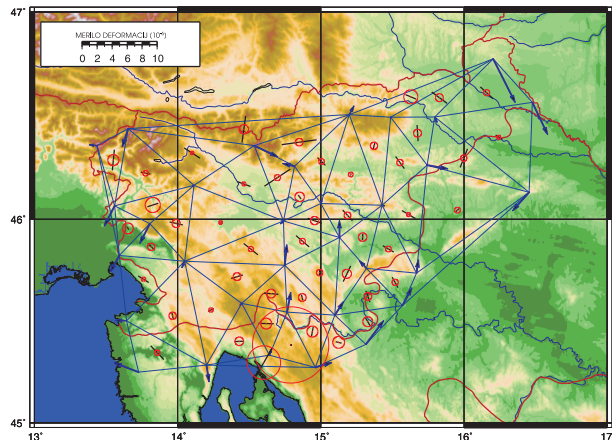


Slika 3: Prikaz vektorskega polja, določenega iz predpostavljenih homogenih deformacij in ocenjenih vektorjev hitrosti AGM

Na sliki 3 so prikazani vektorji hitrosti na točkah astro-geodetske mreže (AGM) Slovenije, določene iz terestričnih opazovanj (kotna in dolžinska opazovanja) ter izmere GNSS. Predpostavljene so homogene (konstantne) deformacije celotnega območja Slovenije, medtem ko so beli vektorji hitrosti izračunani na osnovi teh homogenih deformacij z enačbo 49. Homogene (konstantne) deformacije pomenijo, da so za celotno območje Slovenije enake, kar pa ne velja za vektorje hitrosti. Le-ti spreminajajo tako smer kot tudi velikost.



(a) Glavne normalne deformacije



(b) Glavne strižne deformacije

Slika 4: Izračun deformacij po trikotnikih Delaunayeve triangulacije

Izračun homogenih deformacij v posameznih trikotnikih, določenih na osnovi Delaunayeve triangulacije, pa prikazuje slika 4.

Literatura

- Srpčič, S. 2003. Mehanika trdnih teles. Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 651 str.
- Stanek, M., Turk, G. 2003. Osnove mehanike trdnih teles. Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 651 str.
- Sterle, O. 2007. Združevanje klasičnih geodetskih in GNSS-opazovanj v geodinamičnih raziskavah. Magistrska naloga. Ljubljana, Slovenija, Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba: O. Sterle): 118 str.