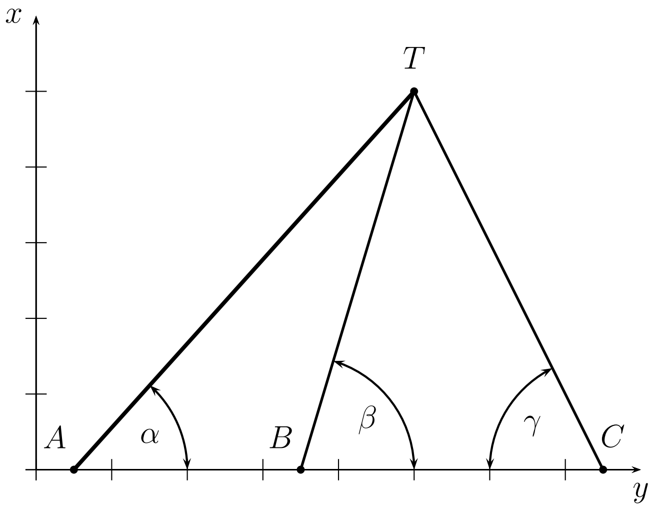
Splošni model izravnave – Ravninska geodetska mreža - opazovani koti:

V ravnini imamo podane položaje treh danih točk, ki ležijo na osi y, in sicer: $A(y_A, x_A) = (10.00\,\text{m}, 0.00\,\text{m})$, $B(y_B, x_B) = (50.00\,\text{m}, 0.00\,\text{m})$ in $C(y_C, x_C) = (120.00\,\text{m}, 0.00\,\text{m})$. Da bi določili položaj točke T, smo na točki A opazovali kot $\alpha = 37°39'$, na točki B kot $\beta = 64°57'$ in na točki C kot $\gamma = 45°28'$, kot to prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnajte opazovanja, izračunajte koordinate točke T, natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} in korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ ter parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T.



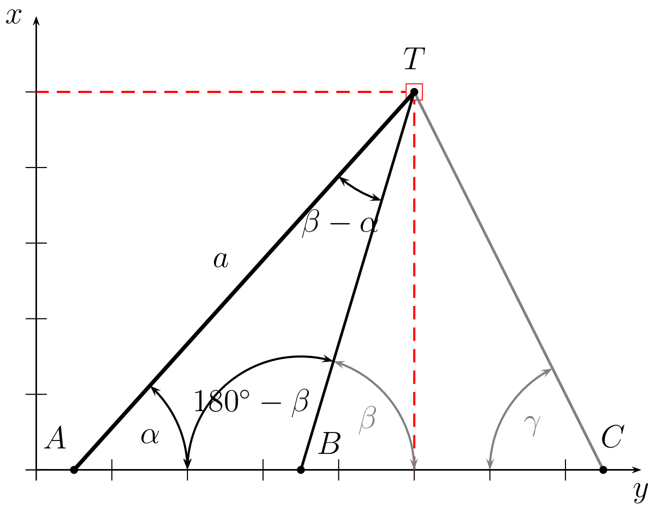
Slika 1: Opazovani koti za določitev položaja točke T

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Da bi določili koordinate točke T smo izmerili n = ___ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le n_0 = ___ opazovanj, zato imamo r = ___ nadštevilnih opazovanj. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriki $\mathbf{Q}$ ter $\mathbf{P}$, pri tem, da so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{1}$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   Za neznanki si izberemo koordinati točke T, torej y_T in x_T in na ta način definiramo vektor neznank $\mathbf{x}$ in s tem u = ___:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \tag{2}$$



Slika 2: Določitev približnih koordinat točke T na osnovi zunanjega ureza

Izračunajmo približne vrednosti neznank. Iz slike 1 vidimo, da imamo načeloma tri možnosti izračuna koordinat s postopkom zunanjega ureza. Za naš izračuna uporabimo točki A in B ter opazovanji α in β, kot to prikazuje slika 2.

V prvem koraku izračunamo kot na točki T, ki je enak $\beta - \alpha$, nato pa s sinusnim izrekom izračunamo stranico a, pri tem, da izhajamo iz znane dolžine d_{AB}. Dobimo:

$$a = d_{AB} \frac{\sin(180° - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \underline{\hspace{2em}}\text{m} \tag{3}$$

Za izračun približnih vrednosti neznank uporabimo koordinate točke A, merjen kot α in dolžino a iz enačbe 3:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A + a\cos(\alpha) \\ x_A + a\sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2em}}\text{m} \\ \underline{\hspace{2em}}\text{m} \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r = \underline{\hspace{1em}}$ in $u = \underline{\hspace{1em}}$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = \underline{\hspace{1em}}$. Za sestavo enačb izhajamo iz enačb pravokotnega trikotnika, ki ga sestavlja točka i ($i = \{A, B, C\}$) in točka T. Enačbe, ki jih dobimo so (izpeljite sami):

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv (y_T - y_A)\tan\hat{\alpha} - x_T = 0 \\ F_2 &\equiv (y_T - y_B)\tan\hat{\beta} - x_T = 0 \\ F_3 &\equiv (y_C - y_T)\tan\hat{\gamma} - x_T = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Enačbe 5 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 5

po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1. Dobimo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 5 po obeh neznankah, koordinatah y_T in x_T:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 5 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le vektor $\mathbf{\Delta}$ in vektor končnih koordinat točke T:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, kjer bomo referenčni standardni odklon $\hat{\sigma}_0$ zapisali v ločnih sekundah, saj so opazovanja sami koti:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_ \\ \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_'' \tag{10}$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, saj referenčne variance a-priori σ_0^2 ne poznamo. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T, korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = \underline{\quad\quad}\text{mm} \qquad \sigma_{x_T} = \underline{\quad\quad}\text{mm} \qquad \rho_{y_T x_T} = \underline{\quad\quad} \tag{11}$$

Izračunajmo še parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T:

$$a = \underline{\quad\quad}\text{mm} \qquad b = \underline{\quad\quad}\text{mm} \qquad \theta = \underline{\quad\quad}^\circ \tag{12}$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
α	____″	____″	__° __′ __″	____″
β	____″	____″	__° __′ __″	____″
γ	____″	____″	__° __′ __″	____″