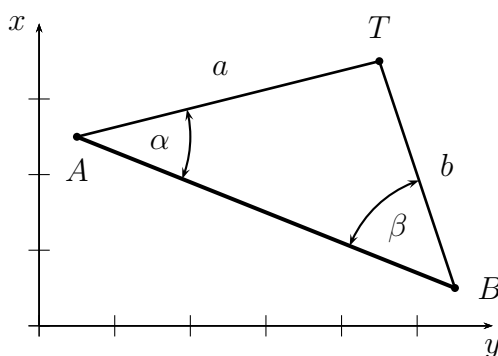


## Splošni model izravnave – Ravninska geodetska mreža:

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk,  $A(y_A, x_A) = (5.00 \text{ m}, 10.00 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (20.00 \text{ m}, 0.00 \text{ m})$ . Da bi določili položaj točke  $T$ , smo s točke  $A$  opazovali dolžino  $a = 16.2 \text{ m}$  ( $\sigma_a = 0.1 \text{ m}$ ) in kot  $\alpha = 45^\circ$  ( $\sigma_\alpha = 30'$ ), s točke  $B$  pa dolžino  $b = 13.2 \text{ m}$  ( $\sigma_b = 0.1 \text{ m}$ ) in kot  $\beta = 60^\circ$  ( $\sigma_\beta = 30'$ ), kot to prikazuje slika 1. S splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke  $T(y_T, x_T)$ , natančnosti koordinat  $\sigma_{y_T}$  in  $\sigma_{x_T}$  ter korelacijo  $\rho_{y_T x_T}$ . Izračunajte tudi parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki  $T$ . Uporabite referenčno varianco a-priori  $\sigma_0^2$ .



Slika 1: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke  $T$

Nalogo smo rešili v okviru poglavja zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK (glej datoteko [Naloga5\\_HZMreza.pdf](#), kjer smo prikazali pogojno izravnavo po MNK. Tu podajamo rešitev s splošnim modelom izravnave

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj  $\mathbf{l}$  in matriko uteži  $\mathbf{P}$  (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo  $n$ ,  $n_0$  in  $r$ .

Da bi določili koordinate točke  $T$  smo izmerili  $n = \underline{\hspace{1cm}}$  opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le  $n_0 = \underline{\hspace{1cm}}$  opazovanj, zato imamo  $r = \underline{\hspace{1cm}}$  nadštevilnih opazovanj. Vektor opazovanj  $\mathbf{l}$  in pripadajoča kovariančna matrika  $\Sigma$  sta:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Če nastavimo za referenčno varianco a-priori  $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$ , bodo kofaktorji in uteži opazovanj enaki:

$$\begin{aligned} q_a = q_b = \underline{\hspace{1cm}} & & q_\alpha = q_\beta = \underline{\hspace{1cm}} \\ p_a = p_b = \underline{\hspace{1cm}} & & p_\alpha = p_\beta = \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned} \quad (2)$$

2. Izberemo si neznanke ( $u$ ) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank  $\mathbf{x}$  in izračunamo približne vrednosti neznank  $\mathbf{x}_0$ .

Za neznanke si izberemo koordinati točke  $T$ , torej  $y_T$  in  $x_T$  in na ta način definiramo vektor neznank  $\mathbf{x}$  in s tem  $u = \underline{\hspace{1cm}}$ . Iz opazovanj izračunamo približne vrednosti neznank in dobimo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A + a \sin(\nu_A^B - \alpha) \\ x_A + a \cos(\nu_A^B - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \text{ m} \\ \underline{\hspace{1cm}} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (3)$$

V enačbi 3 je smerni kot  $\nu_A^B = \text{---}^\circ \text{---}' \text{---}''$ .

3. Sestavimo  $c = r + u$  enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo  $r = \text{---}$  in  $u = \text{---}$ , potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako  $c = r + u = \text{---}$ . Sestavljene enačbe so:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} \sin \hat{\alpha} - \hat{b} \sin \hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b} \cos(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - D^2 \\ F_3 &\equiv \hat{a}^2 - (y_T - y_A)^2 - (x_T - x_A)^2 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{b}^2 - (y_T - y_B)^2 - (x_T - x_B)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave  $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$ .

Enačbe 4 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov,  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$ , in vektor odstopanj  $\mathbf{f}$ . Matrika  $\mathbf{A}$  predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 4 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj  $\mathbf{l}$  iz enačbe 1. Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Matrika  $\mathbf{B}$  predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 4 po obeh neznankah, koordinatah  $y_T$  in  $x_T$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vektor odstopanj  $\mathbf{f}$  dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 4 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m}^2 \\ \text{---m}^2 \\ \text{---m}^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje  $\Delta$ ,  $\mathbf{v}$  in  $\hat{\mathbf{l}}$ . Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev  $\Delta$ ,  $\mathbf{v}$  in  $\hat{\mathbf{l}}$ . Prikažimo tu le vektor  $\Delta$  in vektor končnih koordinat točke  $T$ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (8)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike  $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ ,  $\mathbf{Q}_{vv}$  in  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$  ter referenčno varianco a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ . Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = \text{---m}^2 \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \text{---m}$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike  $\Sigma_{\Delta\Delta}$ ,  $\Sigma_{vv}$  in  $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}}$ .

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori  $\sigma_0^2$ . Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznanek, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Da dobimo natančnosti  $\sigma_{y_T}$  in  $\sigma_{x_T}$  izračunanih koordinat točke  $T$ , korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike  $\Sigma_{\Delta\Delta}$ , korelacijo  $\rho_{y_T x_T}$  pa dobimo iz izvendiaagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = \text{---cm} \quad \sigma_{x_T} = \text{---cm} \quad \rho_{y_T x_T} = \text{---} \quad (10)$$

Izračunajmo še parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki  $T$ :

$$a = \text{---cm} \quad b = \text{---cm} \quad \theta = \text{---}^\circ \quad (11)$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	$v$	$\sigma_v$	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
$a$	---cm	---cm	---m	---cm
$b$	---cm	---cm	---m	---cm
$\alpha$	---'	---'	---°	---'
$\beta$	---'	---'	---°	---'