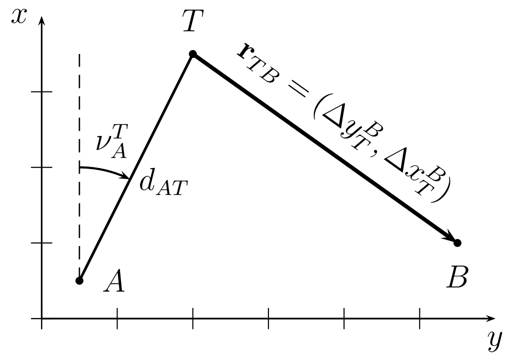
Splošni model izravnave – Horizontalna geodetska mreža (položaj točke T):

Podane imamo koordinate dveh danih točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0\,\text{m}, 10.0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\text{m}, 20.0\,\text{m})$. Da bi določili koordinate točke $T(y_T, x_T)$, smo na točki A izmerili smerni kot $\nu_A^T = 30°57'$ in dolžino $d_{AT} = 58.3\,\text{m}$, na točki T pa bazni vektor $\mathbf{r}_{TB} = (\Delta y_T^B, \Delta x_T^B) = (60.0\,\text{m}, -40.0\,\text{m})$ proti točki B. Če je natančnost smernega kota enaka $\sigma_{\nu_A^T} = 15''$ in če je natančnost vseh ostalih dolžinskih količin enaka $\sigma_D = 4\,\text{mm}$, s splošnim modelom izravnave izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$. Rešite tudi stohastični model izravnave in določite natančnost ocenjenih koordinat točke T in parametre standardne absolutne elipse pogreškov točke T. Pri izračunu natančnosti uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 1: Določitev koordinat točke T na osnovi danih točk A in B ter opazovanj ν_A^T, d_{AT} in $\mathbf{r}_{TB}$

Nalogo smo obravnavali tudi pri poglavju zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK (glej datoteko *Naloga4_PolozajT.pdf*, razlika je le, da imamo sedaj različne natančnosti opazovanj. Pokazali bomo, kako lahko poenostavimo sestavljene enačbe in posledično vse parcialne odvode.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

   Vidimo, da imamo $n =$ ___ opazovanj, kjer želimo določiti koordinati y_T in x_T točke T, torej $n_0 =$ ___ in $r = n - n_0 =$ ___. Natančnosti opazovanj so za dolžinska opazovanja enaka, podana pa je tudi natančnost izmerjenega smernega kota, zato bosta vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajoča kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ enaki:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_{AT} \\ \nu_A^T \\ \Delta y_T^B \\ \Delta x_T^B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\nu_A^T}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_D^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Če nastavimo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_D^2$, bodo kofaktorji in uteži opazovanj enaki:

$$q_D = \_\_\_ \qquad q_{\nu_A^T} = \_\_\_ \qquad p_D = \_\_\_ \qquad p_{\nu_A^T} = \_\_\_ \tag{2}$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
Za neznanki si izberemo koordinati točke T, torej y_T in x_T in na ta način definiramo vektor neznank $\mathbf{x}$ in s tem $u =$ ___. Iz opazovanj izračunamo približne vrednosti neznank in dobimo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - \Delta y_T^B \\ x_B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
Ker imamo $r =$ ___ in $u =$ ___, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u =$ ___. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv y_T - y_A - \hat{d}_{AT} \sin \hat{\nu}_A^T = 0 \\ F_2 &\equiv x_T - x_A - \hat{d}_{AT} \cos \hat{\nu}_A^T = 0 \\ F_3 &\equiv y_T + \Delta \hat{y}_T^B - y_B = 0 \\ F_4 &\equiv x_T + \Delta \hat{x}_T^B - x_B = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
Enačbe 4 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 4 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1. Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_1}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta x_T^B} \\ \frac{\partial F_2}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_2}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta x_T^B} \\ \frac{\partial F_3}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_3}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta x_T^B} \\ \frac{\partial F_4}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_4}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_4}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_4}{\partial \Delta x_T^B} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 4 po obeh neznankah, koordinatah y_T in x_T:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 4 prenesemo na desno stran.

Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, kjer dobimo:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

   V enačbi 8 sta popravek $v_{\nu_A^T}$ in izravnana vrednost $\hat{\nu}_A^T$ podana v radianih. Zapišemo ju lahko tudi $v_{\nu_A^T} = \_\_\_\_''$ in $\hat{\alpha} = \_\_\_\_^\circ \_\_\_\_' \_\_\_\_''$.

   Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe 3 in popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 8 izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$: Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{10}$$

   Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T, korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = \_\_\mathrm{mm} \qquad \sigma_{x_T} = \_\_\mathrm{mm} \qquad \rho_{y_T x_T} = \_\_ \tag{11}$$

Izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na točki T:

$$a = \underline{\quad}\,\mathrm{mm} \qquad b = \underline{\quad}\,\mathrm{mm} \qquad \theta = \underline{\quad}^\circ \tag{12}$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
d_{AT}	___mm	___mm	___m	___mm
ν_A^T	___″	___″	_° _′ _″	___″
Δy_T^B	___mm	___mm	___m	___mm
Δx_T^B	___mm	___mm	___m	___mm