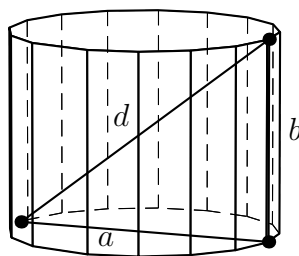


## Splošni model izravnave – Opazovanja v valju:

V valju smo izmerili tri količine (glej sliko 1): premer osnovne ploskve  $a = 10.0\text{m}$ , višino  $b = 20.0\text{m}$  in prostorsko diagonalo  $d = 22.0\text{m}$ . Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj, koliko litrov soka (beri piva) bi lahko pretočili v valj. Izračunajte tudi natančnost določitve količine soka.



Slika 1: Skica valja in opazovanj

Rešitev dobimo s postopkom splošnega modela izravnave, ki je opisan v datoteki [Splosni-ModelIzravnave.pdf](#).

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj  $\mathbf{l}$  in matriko uteži  $\mathbf{P}$  (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo  $n$ ,  $n_0$  in  $r$ .

Iz naloge vidimo, da imamo  $n = \underline{\quad}$  opazovanj ( $a$ ,  $b$  in  $d$ ) v valju, kjer geometrijo lahko prikažemo v pravokotnem trikotniku. Nujno bi potrebovali samo  $n_0 = \underline{\quad}$  opazovanj, to pomeni, da imamo  $r = n - n_0 = \underline{\quad}$  nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1)$$

2. Izberemo si neznanke ( $u$ ) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank  $\mathbf{x}$  in izračunamo približne vrednosti neznank  $\mathbf{x}_0$ .

V tem primeru si bomo izbrali  $u = 1$  neznanke, in sicer točno tisto, po čemer nas sprašuje naloga, neznanke naj bo torej prostornina valja  $V$ . Njeno približno vrednost bomo izračunali iz opazovanj, zato je:

$$\mathbf{x} = [ V ] \quad \mathbf{x}_0 = [ V_0 ] = \left[ \frac{\pi a^2 b}{4} \right] = [ \underline{\quad} \text{m}^3 ] \quad (2)$$

3. Sestavimo  $c = r + u$  enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo  $r = \underline{\quad}$  in  $u = \underline{\quad}$ , potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako  $c = r + u = \underline{\quad}$ . Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v

vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \pi \hat{a}^2 \hat{b} - 4V = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

V enačbah 3 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave  $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$ .

Enačbe 3 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov,  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$ , in vektor odstopanj  $\mathbf{f}$ . Matrika  $\mathbf{A}$  predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 3 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj  $\mathbf{l}$  iz enačbe 1. Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial d} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial d} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Matrika  $\mathbf{B}$  predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 3 po neznanki, prostornini  $V$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial V} \\ \frac{\partial F_2}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Vektor odstopanj  $\mathbf{f}$  dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 3 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \text{---m}^3 \\ \text{---m}^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje  $\mathbf{\Delta}$ ,  $\mathbf{v}$  in  $\hat{\mathbf{l}}$ .

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev  $\mathbf{\Delta}$ ,  $\mathbf{v}$  in  $\hat{\mathbf{l}}$ , kjer dobimo:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \text{---m}^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank  $\mathbf{x}_0$  iz enačbe 2 in popravkov približnih vrednosti neznank  $\mathbf{\Delta}$  iz enačbe 7 izračunamo končne vrednosti neznank  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \text{---m}^3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Če izravnano prostornino  $V$  iz enačbe 8 zapišemo v litrih, pa dobimo  $V = \text{---} \text{ l}$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrice  $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ ,  $\mathbf{Q}_{vv}$  in  $\mathbf{Q}_{\hat{t}\hat{t}}$  ter referenčno varianco a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ .

Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrice kofaktorjev  $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ ,  $\mathbf{Q}_{vv}$  in  $\mathbf{Q}_{\hat{t}\hat{t}}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \left[ \text{---} \right] \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{t}\hat{t}} &= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (9)$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  in referenčni standardni odklon a-posteriori  $\hat{\sigma}_0$  in dobimo:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = \text{---m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \text{---m}\end{aligned}\quad (10)$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrice  $\Sigma_{\Delta\Delta}$ ,  $\Sigma_{vv}$  in  $\Sigma_{\hat{t}\hat{t}}$ .

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ , prikažimo pa le kovariančno matriko neznanek  $\Sigma_{\Delta\Delta}$ :

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \left[ \text{---m}^6 \right] \quad (11)$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznanek, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Izračunajmo natančnost prostornine valja  $\sigma_V$ :

$$\sigma_V = \text{---m}^3 = \text{---l} \quad (12)$$

Izračunajmo tudi natančnosti popravkov opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{v_a} = \text{---m} \quad \sigma_{v_b} = \text{---m} \quad \sigma_{v_d} = \text{---m} \quad (13)$$

Na koncu še natančnosti izravnanih opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{\hat{a}} = \text{---m} \quad \sigma_{\hat{b}} = \text{---m} \quad \sigma_{\hat{d}} = \text{---m} \quad (14)$$

Primerjajte rezultate te naloge z rezultati posredne izravnave (glej primer pri posredni izravnavi lansko leto). Dobimo malo drugačne rezultate, a so razlike veliko manjše kot je ocenjena natančnost rezultatov. Pojavijo pa se zaradi linearizacije nelinearnih enačb v osnovni matrični model tako splošnega kot tudi posrednega modela izravnave po MNK.