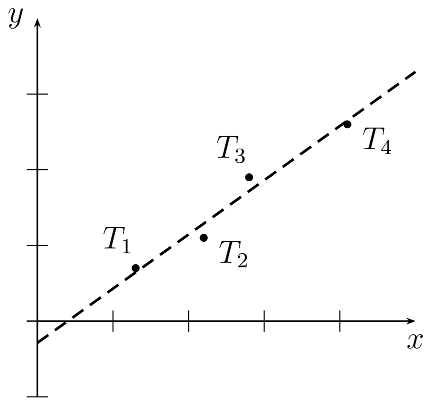
Splošni model izravnave – Premica v ravnini, opazovane tako x kot tudi y koordinate:

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x, kot tudi koordinate y, vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1.

Tabela 1: Opazovane koordinate x in y štirih točk

Točka	x	y
T_1	1.3	0.7
T_2	2.2	1.1
T_3	2.8	1.9
T_4	4.1	2.6

Točke v ravnini prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in določi premico, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n = 8$, opazovane imamo tako 4 koordinate x in 4 koordinate y. Vektor opazovanj nastavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.7 \\ 2.2 \\ 1.1 \\ 2.8 \\ 1.9 \\ 4.1 \\ 2.6 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, velja $\mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I}_{8\times 8}$.

Ni pa tako jasno, koliko opazovanj nujno potrebujemo za rešitev problema (n_0). Poskusimo nalogo zastaviti preko **posredne izravnave po MNI**. Nastavimo enačbe popravkov opazovanj, ki bodo morale biti zapisane v obliki:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - f_{y_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - f_{y_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - f_{x_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - f_{y_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - f_{x_4}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - f_{y_4}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

V enačbah 2 vektor $\mathbf{x}$ predstavlja vektor neznank. Enačbe popravkov sestavimo tako, da prvo zapišemo niz vseh izravnanih opazovanj na začetku enačbe. Potem pa vsa izravnana opazovanja povežemo z neznankami. Ker želimo določiti premico, ki se optimalno prilega točkam, bomo za dve neznanki izbrali parametra premice a in b. Enačbo premice, $y = a\,x + b$, bomo uporabili za opazovane koordinate y, a ker v vsaki enačbi popravkov lahko nastopa le eno opazovanje, tu ne smemo uporabiti koordinate x. Zato za vsako opazovano koordinato x nastavimo novo neznanko, kar pomeni, da moramo dodatno uvesti še štiri neznanke, ki jih označimo s p_1, p_2, p_3 in p_4. Vidimo, je število neznank v tem primeru enako:

$$u = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1,p_2,p_3,p_4} = 6 \tag{3}$$

Ker pa vemo, da pri posredni izravnavi velja, $u = n_0$, smo s tem definirali tudi minimalno število opazovanj, ki jih nujno potrebujemo za rešitev problema.

Na koncu tako lahko zapišemo:

- število opazovanj: $n = 8$,
- minimalno število opazovanj je: $n_0 = 6$,
- število nadštevilnih opazovanj je: $r = 2$.

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
Ker želimo določiti parametre premice, ki se optimalno prilega izmerjenim točkam, bomo uvedli $u = 2$ neznank, torej parametra a in b. Približne vrednosti neznank bomo izračunali iz opazovanj, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 - a_0 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4444 \\ 0.1222 \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
Ker imamo $r = 2$ in $u = 2$, je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 2 + 2 = 4$. Vidimo, da moramo sestaviti toliko enačb, kot imamo izmerjenih točk. Za vsako točko uporabimo enačbo premice in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\hat{x}_1 - b = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\hat{x}_2 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\hat{x}_3 - b = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - a\hat{x}_4 - b = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Vidimo, da v enačbah 5 nastopajo vsa opazovanja in tudi obe uvedeni neznanki, kar pomeni, da enačbe 5 predstavljajo pravilen niz enačb za naš primer.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
Enačbe 5 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = 4 \times 8$, matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times u = 4 \times 2$ in vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = 4 \times 1$. Matriko $\mathbf{A}$ dobimo z odvajanjem vseh enačbi iz 5 po vseh opazovanjih iz 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial y_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial y_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial y_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} & \frac{\partial F_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.444 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.444 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.444 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.444 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 5 po obeh neznankah, torej:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & -1 \\ -x_2 & -1 \\ -x_3 & -1 \\ -x_4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3 & -1.0 \\ -2.2 & -1.0 \\ -2.8 & -1.0 \\ -4.1 & -1.0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo iz enačb 5, da le-te prenesemo na desno stran in uporabimo približne vrednosti neznank in merjena opazovanja. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0 x_1 + b_0 - y_1 \\ a_0 x_2 + b_0 - y_2 \\ a_0 x_3 + b_0 - y_3 \\ a_0 x_4 + b_0 - y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -0.000 \\ -0.533 \\ -0.656 \end{bmatrix} \tag{8}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le izračunan vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.2633 \\ -0.3873 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe 4 in popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 9 izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.7077 \\ -0.2651 \end{bmatrix} \tag{10}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Matrika kofaktorjev neznank je:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 2.893 \times 10^{-1} & -7.521 \times 10^{-1} \\ -7.521 \times 10^{-1} & 2.255 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 3.084 \times 10^{-2} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.176 \end{aligned} \tag{12}$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
Za izračun vseh kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 8.919 \times 10^{-3} & -2.319 \times 10^{-2} \\ -2.319 \times 10^{-2} & 6.953 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \tag{13}$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
Prikažimo natančnosti in korelacijo med obema neznankama:

$$\sigma_a = 0.094 \quad \sigma_b = 0.264 \quad \rho_{ab} = -0.931 \tag{14}$$