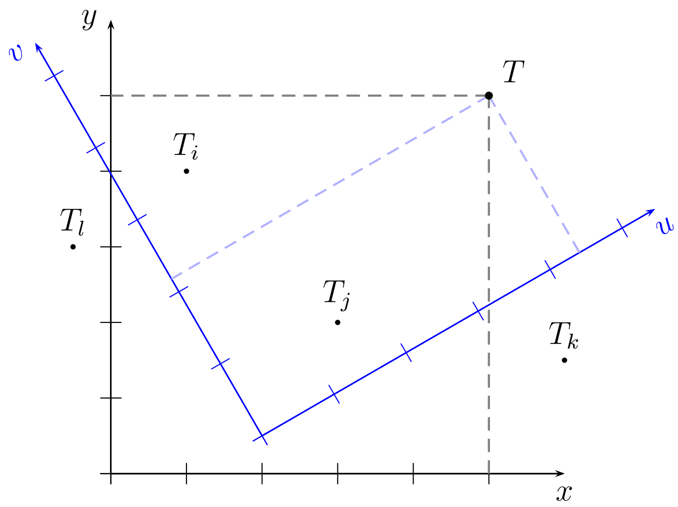
Splošni model izravnave – Podobnostna transformacija v ravnini:

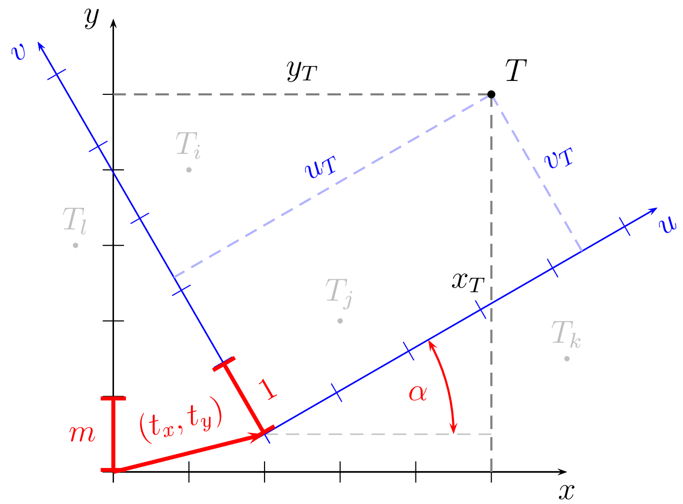
V ravnini imamo k točk, ki imajo opazovane koordinate v dveh koordinatnih sistemih. Prvi koordinatni sistem ima oznaki u in v, drugi pa x in y. Opazovanja so koordinate vseh točk v obeh sistemih, torej koordinate u, v, x in y. Geometrijo problema prikazuje slika 1. S splošnim modelom izravnave izravnajte po MNK izravnajte opazovanja (koordinate točk v obeh sistemih) in izračunajte transformacijske parametre iz sistema uv v sistem xy. Izračunajte tudi natančnosti transformacijskih parametrov.



Slika 1: Prikaz opazovanih koordinat točk v obeh koordinatnih sistemih (uv in xy)

Pri obravnavi podobnostne transformacije obravnavamo problem, ko imamo podane koordinate (fizično) istih točk v dveh koordinatnih sistemih, a same povezave med dvema koordinatnima sistemoma ne poznamo. To pomeni da, če imamo podane koordinate ene točke samo v npr. sistemu uv, ne vemo nič, kakšne so koordinate te točke v sistemu xy. Cilj je, da na osnovi koordinat točk v obeh sistemih določimo povezavo med obema sistemoma. Kot prvo moramo ugotoviti, kateri in kakšni so parametri, ki povezujejo dva koordinatna sistema. Sliko geometrije povezave med dvema koordinatnima sistemoma v ravnini prikazuje slika 2.
Slika 2 prikazuje niz geodetskih točk, ki jim položaje lahko opišemo tako v koordinatnem sistemu uv kot tudi v sistemu xy. Koordinati u_T in v_T točke T prikazujeta položaja točke T v sistemu uv (modra barva), medtem ko koordinati x_T in y_T pa opisujeta položaj točke T v sistemu xy (črna barva). Enako seveda velja za vse ostale točke (T_i, T_j, T_k in T_l), ki so podane v obeh sistemih. Postavi pa se vprašanje, kako lahko opišemo relacijo koordinatnega sistema uv glede na sistem xy. Te parametre, rečemo jim transformacijski parametri, predstavlja slika 2 v rdeči barvi. Ugotovimo lahko, da koordinatni sistem uv lahko glede na koordinatni sistem xy:

- **premaknemo**, kar opišemo z dvema parametroma premika t_x in t_y in predstavljata vektor premika izhodišča obeh sistemov,



Slika 2: Prikaz transformacijskih parametrov med dvema koordinatnima sistemoma (uv in xy)

- **zasukamo**, kar opišemo z enim parametrom zasuka α, ki predstavlja kot zasuka okoli osi z (ali w) in
- **spremenimo velikost**, kar opišemo z enim parametrom merila m, ki predstavlja razmerje med enotama v obeh sistemih.

Vidimo, da transformacijo med dvema koordinatnima sistemoma v ravnini lahko opišemo s štirimi parametri. Ob tem predpostavimo, da sta geometriji geodetske mreže v obeh sistemih podobne[1], zato tako transformacijo imenujemo **podobnostna** transformacija.

Enačba podobnostne transformacije v ravnini

Transformacijo iz sistema uv v sistem xy izvedemo s tremi koraki:

1. Izvedemo zasuk sistema za kot α. S tem naredimo, da so koordinatene osi obeh sistemov vzporedne.
2. Spremenimo merilo s parametrom merila m. S tem naredimo, da imamo enako enoto merila v obeh sistemih.
3. Premaknemo izhodišče koordinatnega sistema uv v središče koordinatnega sistema xy s parametroma premika t_x in t_y.

Vse tri korake zapišemo v enačbi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{1}$$

[1] mrežo lahko premaknemo, zasukamo in povečamo/zmanjšamo, a oblika mora ostati enaka

Enačba 1 je podana v vektorski obliki, a dejansko predstavlja dve enačbi, za vsako koordinatno komponento x in y po eno enačbo, ki ju lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned} x &= t_x + m\cos(\alpha)u + m\sin(\alpha)v \\ y &= t_y - m\sin(\alpha)u + m\cos(\alpha)v \end{aligned} \tag{2}$$

Vidimo, da lahko enačbo 4-parametrične transformacije iz enačbe 1 ali iz enačb 2 zapišemo za vsako točko posebej. V enačbah tako nastopajo vsi štirje transformacijski parametri (t_x, t_y, α in m), koordinati u in v (1. sistem) ter koordinati x in y (2. sistem).

Določitev n, n_0 in r

Ker imamo podanih k točk v ravnini, pomeni, da imamo $n = k \cdot 2 \cdot 2$ opazovanj. Vsaka točka ima **dve** koordinati, koordinate pa imamo podane v **dveh** koordinatnih sistemih. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ zato zapišemo kot

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & x_1 & y_1 & u_2 & v_2 & x_2 & y_2 & \cdots & u_k & v_k & x_k & y_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

Vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ pripada še kovariančna matrika opazovanj $\boldsymbol{\Sigma}$, matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$, vse velikosti $n \times n$.
Kako pa spet določiti minimalno število opazovanj za rešitev problema n_0? Tu bomo razmišljali enako kot pri premici (glej datoteko *Naloga2_Premica_Resitev.pdf*), paraboli (glej datoteko *Naloga4_Parabola.pdf*) ali krožnici (glej datoteko *Naloga10_Kroznica.pdf*). Če bi enačbi 2 uporabili za sestavo enačb popravkov posredne izravnave, bi ugotovili, da:

- bomo uvedli 4 neznanke, to so transformacijski parametri, in da
- opazovani koordinati x in y lahko uporabimo, medtem ko opazovanih koordinat u in v ne (vsaka enačba popravkov ima lahko ne **eno** opazovanje).

Zato moramo za vsako točko uvesti nov par neznank, in sicer p, ki se navezuje na koordinato u, in q, ki pa se navezuje na koordinato v. Pri k-tih točkah to pomeni:

$$n_0 = u = \underbrace{4}_{t_x, t_y, \alpha, m} + \underbrace{2k}_{p_1, q_1, \ldots p_k, q_k} = 4 + 2k \tag{4}$$

Iz enačbe 4 vidimo, da je minimalno število opazovanj n_0 odvisno od števila točk, ki so podane v obeh sistemih. Za različno število podanih točk so vsa tri števila n, n_0 in r podana v preglednici 1. V preglednici nastopajo tri situacije, kjer je prva predstavljena v rdeči barvi v prvi vrstici. Če imamo eno samo točko podano v dveh sistemih, nimamo dovolj informacij za izračun transformacijskih parametrov ($n < n_0$, $r < 0$). V drugem primeru, ko imamo podani dve točki (modra barva), imamo določen problem, kar pomeni, da lahko transformacijske parametre izračunamo enolično ($n = n_0$, $r = 0$). Šele, ko imamo tri točke ali več, imamo predoločen sistem ($n > n_0$, $r > 0$), kar pomeni, da je optimalna rešitev dana preko metode najmanjših kvadratov.

k	n	n_0	r
1	4	4+2= 6	-2
2	8	4+4= 8	0
3	12	4+6=10	2
4	16	4+8=12	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$4k$	$4+2k$	$2k-4$

Preglednica 1: Določitev števil n, n_0 in r v odvisnosti od števila podanih točk k v obeh sistemih

Uvedba neznank pri splošnem modelu izravnave

V prejšnjem poglavju smo videli, da bi morali pri posredni izravnavi uvesti kar $u = n_0$ neznank, kar prikazuje enačba 4. Ker pa bomo uporabili splošni model izravnave, lahko število neznank uvedemo drugače. Tu bomo izbrali le $u = 4$, za neznanke bomo določili le parametre transformacije. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je zato enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \alpha \\ m \end{bmatrix} \tag{5}$$

Sestava enačb splošnega modela izravnave

Ker imamo število neznank enako $u = 4$ in število nadštevilnih opazovanj enako $r = 2k-4$, moramo sestaviti $c = r + u = 4 + 2k - 4 = 2k$ enačb. Sestaviti moramo dvakrat toliko enačb, kot imamo točk, ali povedano drugače, za vsako točko moramo sestaviti dve enačbi. Uporabimo seveda enačbi 2, ki ju za i-to točko preoblikujemo v:

$$\begin{aligned} F_{i,x} &\equiv \hat{x}_i - t_x - m\cos(\alpha)\hat{u}_i - m\sin(\alpha)\hat{v}_i \\ F_{i,y} &\equiv \hat{y}_i - t_y + m\sin(\alpha)\hat{u}_i - m\cos(\alpha)\hat{v}_i \end{aligned} \tag{6}$$

Na osnovi sestavljenih $c = 2k$ enačb v obliki, kot je prikazana v enačbi 6, sestavimo osnovni matrični model splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Velikosti matrik $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektorja $\mathbf{f}$ so sledeče:

1. matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = 2k \times 4k$,
2. matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times 4 = 2k \times 4$ in
3. vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = 2k \times 1$

Pri sestavi matrike $\mathbf{A}$ odvajamo vse enačbe po vseh opazovanjih. Iz oblike sestavljenih enačb iz enačbe 6 pa vidimo, da enačbi za i-to točko vsebujeta le opazovanja i-te točke, torej u_i, v_i, x_i in y_i. Parcialni odvodi enačb 6 po vseh štirih koordinatah so sledeči:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,x}}{\partial u_i} &= -m\cos(\alpha) & \frac{\partial F_{i,x}}{\partial v_i} &= -m\sin(\alpha) & \frac{\partial F_{i,x}}{\partial x_i} &= 1 & \frac{\partial F_{i,x}}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{\partial F_{i,y}}{\partial u_i} &= m\sin(\alpha) & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial v_i} &= -m\cos(\alpha) & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial x_i} &= 0 & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial y_i} &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Matrika $\mathbf{A}$ je velika matrika, ki pa ima veliko praznih elementov in bo na koncu enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -m\cos(\alpha) & -m\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ m\sin(\alpha) & -m\cos(\alpha) & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Matrike $\mathbf{A}_1$ do $\mathbf{A}_k$ so vse velikosti 2×4 in vsebujejo parcialne odvode iz enačbe 7.
Ko sestavljamo matriko $\mathbf{B}$, pa moramo za vsako točko odvajati enačbi 6 po vseh štirih neznankah iz enačbe 5, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,x}}{\partial t_x} &= -1 & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial t_x} &= 0 \\ \frac{\partial F_{i,x}}{\partial t_y} &= 0 & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial t_y} &= -1 \\ \frac{\partial F_{i,x}}{\partial \alpha} &= m\sin(\alpha)u_i - m\cos(\alpha)v_i & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial \alpha} &= m\cos(\alpha)u_i + m\sin(\alpha)v_i \\ \frac{\partial F_{i,x}}{\partial m} &= -\cos(\alpha)u_i - \sin(\alpha)v_i & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial m} &= \sin(\alpha)u_i - \cos(\alpha)v_i \end{aligned} \tag{9}$$

Matrika $\mathbf{B}$ ima na koncu obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & m\sin(\alpha)u_i - m\cos(\alpha)v_i & -\cos(\alpha)u_i - \sin(\alpha)v_i \\ 0 & -1 & m\cos(\alpha)u_i + m\sin(\alpha)v_i & \sin(\alpha)u_i - \cos(\alpha)v_i \end{bmatrix} \tag{10}$$

Na koncu sestavimo še vektor odstopanj $\mathbf{f}$, ki ima na koncu obliko:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} t_x + m\cos(\alpha)u_i + m\sin(\alpha)v_i - x_i \\ t_y - m\sin(\alpha)u_i + m\cos(\alpha)v_i - y_i \end{bmatrix} \tag{11}$$

Rešitev splošnega modela izravnave pri ravninski podobnostni transformaciji

Elemente matrik $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektorja $\mathbf{f}$ izračunamo na osnovi približnih vrednosti neznank in merjenih vrednosti opazovanj. Če ne pričakujemo velike vrednosti zasuka (več kot

90°), potem lahko za približne vrednosti neznank nastavimo kar $t_{x,0} = t_{y,0} = \alpha_0 = 0$ in $m_0 = 1$ (pazi: približna vrednost merila ni enaka 0). V nasprotnem primeru je potrebno iz merjenih koordinat izračunati približne vrednosti vseh štirih transformacijskih parametrov.
Ker imamo v splošnem slabe približne vrednosti transformacijskih parametrov, moramo rešitev splošnega modela izvesti v več iteracijah.