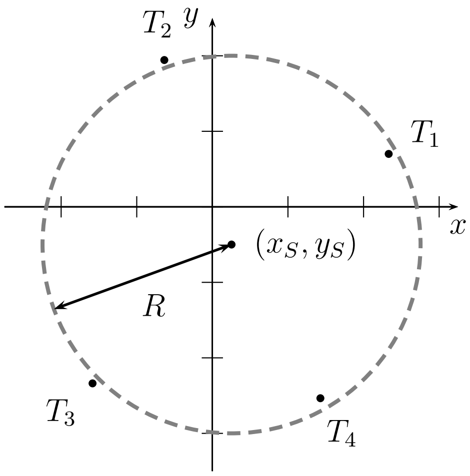
Splošni model izravnave – Točke na krožnici:

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x, kot tudi koordinate y, vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1.

Tabela 1: Opazovane koordinate x in y štirih točk na krožnici

Točka	x [m]	y [m]
T_1	10.16	2.50
T_2	-0.23	7.34
T_3	-5.57	-9.57
T_4	6.50	-11.16

Točke v ravnini prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in določi krožnico, ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj središče krožnice x_S in y_S, njen polmer R, natančnosti vseh neznank in parametre absolutne standardne elipse pogreškov središča krožnice.



Slika 1: Opazovane točke na krožnici v ravnini

Pri izračunu obravnavane naloge bomo imeli dva poudarka, in sicer pri nastavitvi minimalnega števila opazovanj za rešitev problema in pri izračunu približnih vrednosti neznank. Ker skušamo določiti krožnico, ki se optimalno prilega točkam, vidimo, da imamo enak problem kot pri primeru premice (glej datoteko *Naloga2_Premica_Resitev.pdf*) in parabole (glej datoteko *Naloga4_Parabola.pdf*), tudi tu poskušamo na osnovi niza točk v ravnini izračunati krivuljo, ki se optimalno prilega točkam.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov je razvidno, da je imamo opazovane tako koordinate x kot tudi koordinate y štirih točk, zato je število opazovanj enako $n =$ ___ in vektor opazovanj

nastavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato velja $\mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I}$. Določimo sedaj še minimalno število opazovanj za rešitev problema n_0 in število nadštevilnih opazovanj r. Ker morajo točke ležati na krožnici, potem mora za vse točke veljati:

$$(x_i - x_S)^2 + (y_i - y_S)^2 = R^2 \tag{2}$$

Iz enačbe 2 vidimo, da potrebujemo tri parametre, s katerimi lahko enolično določimo krožnico, in sicer koordinate središča krožnice x_S in y_S in polmer R. To nam pove, da bomo uvedli 3 neznanke. Nato bomo pa razmišljali enako kot pri premici ali paraboli. Če želimo pri posredni izravnavi uporabiti enačbo 2 za sestavo enačbe popravkov, moramo ali opazovano koordinato y ali x nadomestiti z novo neznanko. Ker imamo 4 točke, to pomeni dodatne 4 neznanke (glej datoteki Naloga2_Premica_Resitev.pdf in *Naloga4_Parabola.pdf*). Iz tega lahko sklepamo, da je $n_0 = 3 + 4 = 7$ in posledično, število nadštevilnih opazovanj je $r = 1$.

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   Kot smo že zapisali, si izberemo tri neznanke x_S, y_S in R. Vektor $\mathbf{x}$ je enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ R \end{bmatrix} \tag{3}$$

Pojavi pa se vprašanje, kako izračunati približne vrednosti neznank. Seveda bomo izhajali iz enačbe krožnice (2), uporabili pa bomo prve tri merjene točke. Zapisali bomo:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_S)^2 + (y_1 - y_S)^2 &= R^2 \\ (x_2 - x_S)^2 + (y_2 - y_S)^2 &= R^2 \\ (x_3 - x_S)^2 + (y_3 - y_S)^2 &= R^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Odstranimo polmer R iz enačb 4, tako da naredimo razliki: 2. - 1. enačba in 3. - 1. enačba. Dobimo:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_S)^2 - (x_1 - x_S)^2 + (y_2 - y_S)^2 - (y_1 - y_S)^2 &= 0 \\ (x_3 - x_S)^2 - (x_1 - x_S)^2 + (y_3 - y_S)^2 - (y_1 - y_S)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Kvadrirajmo vse elemente v enačbah 5 in če ustrezno preuredimo enačbi, bomo dobili:

$$\begin{aligned} 2x_S(x_2 - x_1) + 2y_S(y_2 - y_1) &= x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ 2x_S(x_3 - x_1) + 2y_S(y_3 - y_1) &= x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Vidimo, da v enačbah 6 ne nastopata kvadrata koordinat središča (x_S^2 in y_S^2) in da dobimo dve linearni enačbi z dvema neznakama. Rešitev enostavno dobimo tako, da enačbi zapišemo v matrični obliki in rešimo kvadratni sistem. Približni vrednosti koordinat središča krožnice sta:

$$x_{S,0} = \_\_\mathrm{m} \qquad y_{S,0} = \_\_\mathrm{m} \tag{7}$$

Polmer R izračunamo tako, da uporabimo koordinate točke T_1 in koordinate središča krožnice iz enačbe 7. Dobimo:

$$R_0 = \sqrt{(x_1 - x_{S,0})^2 + (y_1 - y_{S,0})^2} = \_\_\mathrm{m} \tag{8}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r = \_\_$ in $u = \_\_$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = \_\_$. Tudi tu za vsako točko sestavimo eno enačbo, uporabimo pa enačbo krožnice iz enačbe 2. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv (\hat{x}_1 - x_S)^2 + (\hat{y}_1 - y_S)^2 - R^2 \\ F_2 &\equiv (\hat{x}_2 - x_S)^2 + (\hat{y}_2 - y_S)^2 - R^2 \\ F_3 &\equiv (\hat{x}_3 - x_S)^2 + (\hat{y}_3 - y_S)^2 - R^2 \\ F_4 &\equiv (\hat{x}_4 - x_S)^2 + (\hat{y}_4 - y_S)^2 - R^2 \end{aligned} \tag{9}$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = \_\_ \times \_\_$ in predstavlja parcialne odvode enačb 9 po opazovanjih (iz enačbe 1). Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times u = \_\_ \times \_\_$ in predstavlja parcialne odvode enačb 9 po neznankah (iz enačbe 3). Vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = \_\_ \times 1$.

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Prikažimo v tem delu le vektor $\mathbf{\Delta}$, popravke opazovanj in izravnana opazovanja pa na koncu, skupaj z natančnostmi. Za rešitev neznank dobimo:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{10}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčnega standardnega odklona $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \underline{\quad\quad} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \underline{\quad\quad}\mathrm{mm}\end{aligned} \tag{11}$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, saj nimamo podanih natančnosti opazovanj. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
Da dobimo natančnosti koordinat središča krožnice σ_{x_S} in σ_{y_S} in polmera σ_R, korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{x_S y_S}$ pa dobimo iz prvega izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{x_S} = \underline{\quad\quad}\mathrm{mm} \qquad \sigma_{y_S} = \underline{\quad\quad}\mathrm{mm} \qquad \rho_{y_T x_T} = \underline{\quad\quad} qquad \sigma_R = \underline{\quad\quad}\mathrm{mm} \tag{12}$$

Izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na središča krožnice:

$$a = \underline{\quad\quad}\mathrm{mm} \qquad b = \underline{\quad\quad}\mathrm{mm} \qquad \theta = \underline{\quad\quad}^\circ \tag{13}$$

Popravki opazovanj, izravnana opazovanja in njihove natančnosti pa so prikazani spodaj.

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
x_1	____mm	____mm	____m	____mm
y_1	____mm	____mm	____m	____mm
x_2	____mm	____mm	____m	____mm
y_2	____mm	____mm	____m	____mm
x_3	____mm	____mm	____m	____mm
y_3	____mm	____mm	____m	____mm
x_4	____mm	____mm	____m	____mm
y_4	____mm	____mm	____m	____mm