

Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodetsko inženirstvo in upravljanje nepremičnin, 2. letnik

ANALIZA OPAZOVANJ V GEODEZIJI 2 - VAJE

Splošni model izravnave po MNK

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 25. november 2025

Kazalo vsebine

Kazalo vsebine	i
Kazalo slik	ii
Kazalo preglednic	iii
1 SPLOŠNI MODEL IZRAVNAVE	1
1.1 Osnovne nastavitve splošnega modela izravnave	1
1.2 Sestava enačb splošnega modela izravnave	1
1.3 Rešitev matematičnega modela izravnave	3
1.4 Posebna primera splošnega modela: posredna in pogojna izravnavi	3
1.4.1 Pogojna izravnavi	4
1.4.2 Posredna izravnavi	4
1.5 Postopek izračuna pri splošnem modelu izravnave po MNK	5
1.6 Primer 1 – pravokotni trikotnik	6
1.6.1 Rešitev 1 – dve neznanki in 1. niz enačb	6
1.6.2 Rešitev 2 – dve neznanki in 2. niz enačb	9
1.6.3 Rešitev 3 – samo ena neznanka, stranica	10
1.6.4 Rešitev 4 – samo ena neznanka, površina trikotnika	12
1.7 Primer 2 – višina reperja	15
1.8 Primer 3 – premica v ravnini, opazovani obe koordinati točk	18
1.9 Primer 4 – opazovanja v valju	22
1.10 Primer 5 – točke na paraboli	25
1.11 Primer 6 – Ravninska geodetska mreža (1)	29
1.12 Primer 7 – Ravninska geodetska mreža (2)	32
1.13 Primer 8 – Ravninska geodetska mreža (3) – opazovani koti	35
1.14 Primer 9 – višina točke – opazovani koti	39
1.15 Primer 10 – višina točke – opazovane dolžine	43
1.16 Primer 11 – točke na krožnici	46
1.17 Ravninska podobnostna transformacija	50
1.17.1 Enačba podobnostne transformacije v ravnini	51
1.17.2 Določitev osnovnih parametrov izravnave	52
1.17.3 Uvedba neznank pri splošnem modelu izravnave	53
1.17.4 Sestava enačb splošnega modela izravnave	53
1.17.5 Rešitev splošnega modela izravnave pri ravninski podobnostni transformaciji	54

Kazalo slik

1-1	Skica opazovanj v pravokotnem trikotniku	6
1-2	Prikaz izmerjenih opazovanj za določitev višine novega reperja	15
1-3	Točke premice v ravnini	18
1-4	Skica valja in opazovanj	22
1-5	Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli	25
1-6	Opazovanja, optimalna parabola in natančnost interpolacije in ekstrapolacije	28
1-7	Prikaz natančnosti interpoliranih točk	28
1-8	Določitev koordinat nove točke na osnovi danih točk, smernega kota, dolžine in baznega vektorja	29
1-9	Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja nove točke	32
1-10	Opazovani koti za določitev položaja nove točke	35
1-11	Določitev približnih koordinat nove točke na osnovi zunanjšega ureza	36
1-12	Opazovani višinski koti za določitev višine nove točke	39
1-13	Določitev približne višine na osnovi enačb zunanjšega ureza	40
1-14	Opazovane dolžine za določitev višine nove točke	43
1-15	Določitev približne višine na osnovi enačb ločnega preseka	44
1-16	Opazovane točke na krožnici v ravnini	46
1-17	Prikaz opazovanih koordinat točk v obeh koordinatnih sistemih	50
1-18	Prikaz transformacijskih parametrov med dvema koordinatnima sistemoma	50

Kazalo preglednic

1–1	Opazovane vse koordinate štirih točk na premici	18
1–2	Opazovane vse koordinate štirih točk na krožnici	46
1–3	Določitev osnovnih parametrov izravnave v odvisnosti od števila podanih točk v obeh sistemih	53

1 SPLOŠNI MODEL IZRAVNAVE

Pri posredni in pogojni izravnavi smo videli, da v primeru nadštevilnih opazovanj le izravnavo poda optimalno oceno izravnanih opazovanj in izravnanih neznank. Glede na obliko podatkov in funkcijskih zvez med opazovanji oz. neznankami smo izbrali ali pogojno metodo izravnave ali posredni model izravnave. Oba modela sta samo posebna primera modela izravnave, ki ga poimenujemo **splošni model izravnave**.

1.1 Osnovne nastavitve splošnega modela izravnave

Tako kot pri vseh metodah izravnave, tudi pri splošnem modelu določimo tri količine, in sicer:

- n - število pridobljenih opazovanj,
- n_0 - minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev modela in
- $r = n - n_0$ - število nadštevilnih opazovanj.

Pri posredni metodi izravnave smo nastavili točno $u = n_0$ neznank. V primeru splošnega modela izravnave pa imamo bolj proste roke, nastavimo u neznank, kjer pa velja:

$$0 \leq u \leq n_0 \quad (1-1)$$

Enačba (1-1) nam pove, da lahko nastavimo toliko neznank, kolikor jih želimo. Edini pogoj je, da število teh neznank ne sme presegati števila n_0 .

Pojavi pa se vprašanje, koliko enačb moramo sestaviti. Ker vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene pogojne enačbe in ker moramo vsako uvedeno neznanko povezati z opazovanji velja, da je število sestavljenih enačb enako:

$$c = r + u \quad (1-2)$$

Enačba (1-2) pove, da pri r nadštevilnih opazovanjih, kjer uvedemo u neznank, potrebujemo za izravnavo c sestavljenih enačb.

1.2 Sestava enačb splošnega modela izravnave

Pri splošnem modelu izravnave moramo prvo nastaviti dve količini, in sicer:

- $\mathbf{l}$ - vektor opazovanj, velikosti $n \times 1$ ($\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{bmatrix}^T$) s pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ ,
- $\mathbf{x}$ - vektor neznank, velikosti $u \times 1$ ($\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_u \end{bmatrix}^T$).

Sestavimo c enačb, ki povezujejo vsa (izravnana) opazovanja in vse uvedene neznanke. Splošna oblika enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv f_1(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n, x_1, x_2, \dots, x_u) = 0 \\ F_2 &\equiv f_2(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n, x_1, x_2, \dots, x_u) = 0 \\ &\vdots \\ F_c &\equiv f_c(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n, x_1, x_2, \dots, x_u) = 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

Enačba (1-3) prikazuje sestavljenih c enačb, ki vsebujejo $n + u$ neznanih parametrov, in sicer vsa izravnana opazovanja in vse neznanke. Matrično lahko enačbe (1-3) zapišemo v obliki:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1-4)$$

V enačbi (1-4) imamo na levi strani enačbe (1-3), na desni strani enačaja pa ničelni vektor velikosti $c \times 1$.

Numeričnih vrednosti argumenta funkcije $\mathbf{F}$ (izravnana opazovanja $\hat{\mathbf{l}}$ in neznanke $\mathbf{x}$) ne poznamo, lahko pa jih nadomestimo z:

- $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$, kjer je $\mathbf{v}$ vektor popravkov opazovanj,
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta$, kjer je $\mathbf{x}_0$ vektor približnih vrednosti neznank in Δ popravki približnih vrednosti neznank.

Sistem nelinearnih enačb (1-4) tako lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 + \Delta) = \mathbf{0} \quad (1-5)$$

Pričakovane vrednosti popravkov opazovanj so majhnega velikostnega reda v primerjavi z opazovanji, prav tako pričakujemo, da bodo popravki neznank majhni. Zato lahko enačbo (1-5) (oz. sistem c enačb) razvijemo v Taylorjevo vrsto, kjer zanemarimo vse člene drugega in višjih redov. Razvoj naredimo tako za opazovanja (približne vrednosti so opazovane vrednosti $\mathbf{l}$, prirastki so popravki opazovanj $\mathbf{v}$) kot tudi za neznanke (približne vrednosti so približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$, prirastki so popravki neznank Δ). Linearizirana oblika je tako dana z:

$$\mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 + \Delta) \approx \mathbf{F}(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{l}} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_0} \Delta = \mathbf{0} \quad (1-6)$$

Enačbo (1-6) preuredimo, da dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{l}} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_0} \Delta = -\mathbf{F}(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0) \quad (1-7)$$

V enačbi (1-7) elemente označimo kot:

- $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{l} = \mathbf{A}$ → matrika koeficientov/parcialnih odvodov po opazovanjih, velikosti $c \times n$,
- $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x}_0 = \mathbf{B}$ → matrika koeficientov/parcialnih odvodov po neznankah, velikosti $c \times u$,
- $-\mathbf{F}(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}$ → odstopanja enačb oz. prosti členi enačb splošnega modela izravnave, velikosti $c \times 1$.

Tako lahko zapišemo končno obliko sistema lineariziranih enačb za splošni model izravnave:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} \quad (1-8)$$

1.3 Rešitev matematičnega modela izravnave

Do končnih rezultatov izravnave po splošnem modelu pridem z nizom matričnih izračunov. **Prvo rešimo funkcionalni model** izravnave:

- Matrika kofaktorjev in matrika uteži ekvivalentnih opazovanj / enačb:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{P}_e &= \mathbf{Q}_e^{-1} \end{aligned} \quad (1-9)$$

- Sistem normalnih enačb:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}_e \mathbf{B} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}_e \mathbf{f} \end{aligned} \quad (1-10)$$

- Rešitev funkcionalnega modela:

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{Q} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_e (\mathbf{f} - \mathbf{B} \Delta) \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

V drugem koraku pridobimo **rešitev stohastičnega modela**:

- Referenčna varianca a-posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} \quad (1-11)$$

- Matrike kofaktorjev vektorjev funkcionalnega modela:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_e (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_e) \mathbf{A} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} \end{aligned} \quad (1-12)$$

- Variančno-kovariančne matrike ($\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}$) za vse tri izračunane vektorje, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela (Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$), izračunamo tako, da matrike kofaktorjev iz enačbe (1-12) pomnožimo z ustrezno referenčno varianco σ^2 , torej:

$$\Sigma_{ii} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{ii} \quad i = \{\Delta, v, \hat{l}\} \quad (1-13)$$

1.4 Posebna primera splošnega modela: posredna in pogojna izravnava

Prikažimo, v katerih primerih se splošni model izravnave pretvori v pogojno oziroma posredno izravnava.

1.4.1 Pogojna izravnava

V primeru, da izberemo število neznank $u = 0$, torej ko nimamo nobene neznanke, potem nimamo vektorja Δ in matrike $\mathbf{B}$. V tem primeru imamo osnovni matrični sistem v obliki:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (1-14)$$

Rešitev funkcionalnega modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^T \\ \mathbf{P}_e &= \mathbf{Q}_e^{-1} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{P}_e \mathbf{f} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^T \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1-15)$$

Rešitev stohastičnega modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^T \mathbf{P}_e \mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} \end{aligned} \quad (1-16)$$

1.4.2 Posredna izravnava

V primeru, ko pa izberemo točno toliko neznank, kot je število nujno potrebnih opazovanj za rešitev modela $u = n_0$ in hkrati za vsako opazovanje sestavimo svojo enačbo (popravkov), kjer opazovanje nastopa linearno v enačbi, potem dobimo posredni model izravnave. Pri posrednem modelu izravnave velja, da je $\mathbf{A}$ enotska matrika in $u = n_0$. Osnovni matrični sistem ima obliko:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} \quad (1-17)$$

Rešitev funkcionalnega modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}_e &= \mathbf{Q}_e^{-1} = \mathbf{P} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \\ \Delta &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mathbf{B}\Delta \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1-18)$$

Rešitev stohastičnega modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (1-19)$$

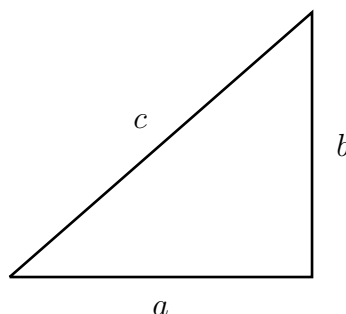
1.5 Postopek izračuna pri splošnem modelu izravnav po MNK

Pri splošnem modelu izravnav postopamo po naslednjih korakih:

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .
2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnav, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnav $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.
5. Rešimo funkcionalni model izravnav, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
6. Rešimo stohastični model izravnav, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

1.6 Primer 1 – pravokotni trikotnik

Opazovali smo stranice v pravokotnem trikotniku in dobili: $a = 216,7$ m, $b = 163,3$ m in $c = 271,3$ m, kot prikazuje slika 1–1. Dolžine smo izmerili z razdaljemerom, ki ima podano natančnost kot $\sigma_d = 2,0$ cm. S splošnim modelom izravnaj opazovanja in določi površino parcele S ter njeno natančnost σ_S . Za izračun natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2 .



Slika 1–1: Skica opazovanj v pravokotnem trikotniku

Uporabo splošnega modela izravnave na tem pravokotnem trikotniku bomo prikazali s štirimi rešitvami, in sicer:

- uvedli bomo dve neznanki, $x \simeq a$ in $y \simeq b$, a prikazali dva različna niza enačb,
- uvedli bomo eno samo neznanko, $x \simeq a$, in
- za neznanko bomo nastavili kar S .

1.6.1 Rešitev 1 – dve neznanki in 1. niz enačb

Za rešitev bomo uporabili korake iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz naloge vidimo, da imamo $n = 3$ opazovanj (a , b in c), kjer bi potrebovali samo $n_0 = 2$ opazovanj za enolično rešitev. To pomeni, da imamo $r = n - n_0 = 1$ nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \sigma_0^2 = \sigma_d^2 = 4,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1-20)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

V tem primeru si bomo izbrali $u = 2$ neznanki, in sicer x naj predstavlja stranico a , y pa stranico b , kjer jim bomo približne vrednosti nastavili iz opazovanj. Velja:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216,7 \text{ m} \\ 163,3 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnav, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 1$ in $u = 2$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 1 + 2 = 3$. Enačbe za splošni model izravnav imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. Primer treh takih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv y - \hat{b} = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c}^2 - x^2 - \hat{b}^2 = 0 \end{aligned} \quad (1-22)$$

V enačbah (1-22) nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi obe neznanki, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbe (1-22) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-22) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1-20). Dobimo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial c} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial c} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2b & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -1,0 & 0,0 \\ 0,0 & -326,6 & 542,6 \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-22) po obeh neznankah, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem neznank $\mathbf{x}$ iz enačbe (1-21). Dobimo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \\ -433,4 & 0,0 \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1-22) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ b - y_0 \\ b^2 + x_0^2 - c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 22,090 \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnav, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela je predstavljena v prvem delu poglavja 1.3, kjer moramo uporabiti 7 enačb za izračun rešitve. Končni vektorji so enaki:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \\ -0,0123 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \\ -0,0123 \text{ m} \\ 0,0204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \\ 163,2877 \text{ m} \\ 271,3204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe (1-21) in popravkov približnih vrednosti neznank Δ iz enačbe (1-26) izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \\ 163,2877 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\tilde{t}\tilde{t}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Rešitev stohastičnega modela je predstavljena v drugem delu poglavja 1.3, kjer dobimo matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\tilde{t}\tilde{t}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 0,681 & -0,240 \\ -0,240 & 0,819 \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} 0,319 & 0,240 & -0,399 \\ 0,240 & 0,181 & -0,301 \\ -0,399 & -0,301 & 0,500 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{t}\tilde{t}} &= \begin{bmatrix} 0,681 & -0,240 & 0,399 \\ -0,240 & 0,819 & 0,301 \\ 0,399 & 0,301 & 0,500 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-28)$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 8,286 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,029 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-29)$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\tilde{t}\tilde{t}}$.

Za izračun vseh kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 , kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 2,724 \times 10^{-4} & -9,614 \times 10^{-5} \\ -9,614 \times 10^{-5} & 3,276 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \\ \Sigma_{vv} &= \begin{bmatrix} 1,276 \times 10^{-4} & 9,614 \times 10^{-5} & -1,597 \times 10^{-4} \\ 9,614 \times 10^{-5} & 7,245 \times 10^{-5} & -1,204 \times 10^{-4} \\ -1,597 \times 10^{-4} & -1,204 \times 10^{-4} & 2,000 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \\ \Sigma_{\tilde{t}\tilde{t}} &= \begin{bmatrix} 2,724 \times 10^{-4} & -9,614 \times 10^{-5} & 1,597 \times 10^{-4} \\ -9,614 \times 10^{-5} & 3,276 \times 10^{-4} & 1,204 \times 10^{-4} \\ 1,597 \times 10^{-4} & 1,204 \times 10^{-4} & 2,000 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (1-30)$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Prvo izračunajmo natančnosti in korelacije neznank. Dobimo:

$$\sigma_x = 0,017 \text{ m} \quad \sigma_y = 0,018 \text{ m} \quad \rho_{xy} = -0,322 \quad (1-31)$$

Izračunajmo tudi natančnosti in korelacije popravkov opazovanj:

$$\begin{aligned} \sigma_{v_a} &= 0,011 \text{ m} & \sigma_{v_b} &= 0,009 \text{ m} & \sigma_{v_c} &= 0,014 \text{ m} \\ \rho_{v_a v_b} &= 1,000 & \rho_{v_a v_c} &= -1,000 & \rho_{v_b v_c} &= -1,000 \end{aligned} \quad (1-32)$$

Na koncu še natančnosti in korelacije izravnanih opazovanj:

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{a}} &= 0,017 \text{ m} & \sigma_{\hat{b}} &= 0,018 \text{ m} & \sigma_{\hat{c}} &= 0,014 \text{ m} \\ \rho_{\hat{a}\hat{b}} &= -0,322 & \rho_{\hat{a}\hat{c}} &= 0,684 & \rho_{\hat{b}\hat{c}} &= 0,470 \end{aligned} \quad (1-33)$$

Naloga na koncu zahteva še izračun površine S s pripadajočo natančnostjo σ_S . Uporabili bomo izravnani neznanki iz enačbe (1-27), kjer dobimo:

$$S = \frac{x y}{2} = 17\,690,90 \text{ m}^2 \quad (1-34)$$

Natančnost površine σ_S izračunamo s pomočjo zakona o prenosu varianc in kovarianc. Izhajamo iz enačbe (1-34) in kovariančne matrike neznank iz enačbe (1-30). Za natančnost površine dobimo:

$$\sigma_S = 1,99 \text{ m}^2 \quad (1-35)$$

1.6.2 Rešitev 2 – dve neznanki in 2. niz enačb

Pri tej rešitvi bomo uporabili drugačne enačbe in pokazali, da to ne bo vplivalo na rezultate. V nadaljevanju tako prikazujemo le tiste podatke in rezultate, ki so drugačni kot v primeru rešitve 1 iz poglavja 1.6.1.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Povsem enako kot poglavje 1.6.1 (enačba (1-20)).

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Tu si izberemo enaki neznanki in jima izračunamo enaki približni vrednosti (enačba (1-21)).

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Sestavili bomo $c = r + u = 1 + 2 = 3$ enačb, ki pa bodo drugačne kot so predstavljene v enačbi (1-22) v poglavju 1.6.1. Tu bodo enačbe oblike:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv x^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{a}^2 + y^2 - \hat{c}^2 = 0 \end{aligned} \quad (1-36)$$

V enačbah (1-36) nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi obe neznanki, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Matrični model sestavimo na osnovi enačb iz (1–36). Matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$ so:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2a & 2b & -2c \\ 0 & 2b & -2c \\ 2a & 0 & -2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433,40 & 326,60 & -542,60 \\ 0,00 & 326,60 & -542,60 \\ 433,40 & 0,00 & -542,60 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2x_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 433,40 & 0,00 \\ 0,00 & 326,60 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} c^2 - a^2 - b^2 \\ c^2 - x_0^2 - b^2 \\ c^2 - a^2 - y_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,09 \\ -22,09 \\ -22,09 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1-37)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Vektorji Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela imajo vrednosti:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \\ -0,0123 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \\ -0,0123 \text{ m} \\ 0,0204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \\ 163,2877 \text{ m} \\ 271,3204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

Če primerjamo vrednosti iz enačbe (1–26) prejšnjega poglavja 1.6.1, vidimo, da smo v enačbi (1–38) dobili povsem enake rezultate. Izračunajmo še neznanke $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \\ 163,2877 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

Spet, vrednosti v enačbi (1–39) so popolnoma enake kot tiste iz enačbe (1–27).

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Za rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbi (1–28) in (1–29).

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$.

Za rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačba (1–30).

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Za rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbe (1–31), (1–32) in (1–33).

Za izračun površine tudi tu uporabimo izračunani neznanki iz enačbe (1–39) in pripadajočo kovariančno matriko iz enačbe (1–30). Rezultati so identični kot v prejšnjem poglavju (glej enačbi (1–34) in (1–35)).

1.6.3 Rešitev 3 – samo ena neznanka, stranica

Pri tej rešitvi bomo pokazali, da lahko v funkcionalni model uvedemo tudi drugačno število neznank, kar tudi ne bo vplivalo na končne rezultate. V nadaljevanju tako prikazujemo le tiste podatke in rezultate, ki so drugačni kot v primeru rešitve 1 in 2 iz poglavij 1.6.1 in 1.6.2.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Povsem enako kot poglavje 1.6.1 (enačba (1-20)).

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

V tem primeru bomo nastavili $u = 1$ neznanko, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216,7 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnav, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Sestavili bomo $c = r + u = 1 + 1 = 2$ enačb, torej manj enačb kot v obeh prejšnjih primerih (enačbi (1-22) in (1-36)). Tu imamo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv x - \hat{a} = 0 \end{aligned} \quad (1-41)$$

Tudi v enačbah (1-41) nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi ena uvedena neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Matrični model sestavimo na osnovi enačb iz (1-41). Matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$ so manjše dimenzije kot v poglavjih 1.6.1 in 1.6.2 in imajo obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2a & 2b & -2c \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433,4 & 326,6 & -542,6 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} c^2 - a^2 - b^2 \\ a - x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,1 \\ 0,0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-42)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnav, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Vektorji $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela imajo vrednosti:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \\ -0,0123 \text{ m} \\ 0,0204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \\ 163,2877 \text{ m} \\ 271,3204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-43)$$

Če primerjamo vrednosti iz enačb (1-26) in (1-38) poglavij 1.6.1 in 1.6.2, vidimo, da dobimo povsem enake rezultate. Izračunajmo še neznanko $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-44)$$

Spet, vrednost v (1-44) je neznanka x , izračunana popolnoma enako kot v poglavju 1.6.1 ali 1.6.2.

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{t}\hat{t}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Ker imamo samo eno neznanko, je matrika $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ enaka:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 0,681 \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

Za matriki $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{t}\hat{t}}$ glej poglavje 1.6.1, enačbi (1-28) in (1-29).

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{t}\hat{t}}$.

Kovariančna matrika neznank $\Sigma_{\Delta\Delta}$ ima samo en element, to je varianco σ_x^2 in ima vrednost:

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 2,724 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-46)$$

Za matriki Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{t}\hat{t}}$ glej poglavje 1.6.1, enačba (1-30).

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Natančnost neznanke je $\sigma_x = 0,017 \text{ m}$. Za ostale rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbi (1-32) in (1-33).

Ker imamo tu izračunano le eno neznanko (x), bomo za izračun površine uporabili izravnana opazovanja iz vektorja $\hat{\mathbf{I}}$ iz enačbe (1-43), kjer dobimo:

$$S = \frac{\hat{a}\hat{b}}{2} = 17\,690,90 \text{ m}^2 \quad (1-47)$$

Za izračun natančnosti površine σ_S bomo seveda uporabili zakon o prenosu varianc, le da tu izhajamo iz kovariančne matrike izravnanih opazovanj $\Sigma_{\hat{t}\hat{t}}$. Na koncu dobimo:

$$\sigma_S = 1,99 \text{ m}^2 \quad (1-48)$$

Rezultat iz (1-48) tudi v tem primeru povsem enak kot pri ostalih dveh rešitvah (enačba (1-35)).

1.6.4 Rešitev 4 – samo ena neznanka, površina trikotnika

Na koncu uporabimo za neznanko še iskano količino, in sicer površino trikotnika S in pokažimo, da vrsta neznanke ne vpliva na rezultate.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Povsem enako kot poglavje 1.6.1 (enačba (1-20)).

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

V tem primeru bomo nastavili $u = 1$ neznanko, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ab}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17\,693,6 \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-49)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Sestavili bomo $c = r + u = 1 + 1 = 2$ enačb, v katerih bomo povezali vsa tri opazovanja in neznanko, površino S :

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}\hat{b} - 2S = 0 \end{aligned} \quad (1-50)$$

Tudi v enačbah (1-50) nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi ena uvedena neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Matrični model tudi tu sestavimo na osnovi enačb iz (1-50) in za matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$ dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2a & 2b & -2c \\ b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433,4 & 326,6 & -542,6 \\ 163,3 & 216,7 & 0,0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -2,0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} c^2 - a^2 - b^2 \\ 2S_0 - ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,1 \\ 0,0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-51)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{I}}$.

Vektorji $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{I}}$, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela imajo vrednosti:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -2,6547 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,0163 \text{ m} \\ -0,0123 \text{ m} \\ 0,0204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 216,6837 \text{ m} \\ 163,2877 \text{ m} \\ 271,3204 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-52)$$

Vektor $\mathbf{\Delta}$ se nanaša na površino trikotnika, zato njegove vrednosti ne moremo primerjati z vektorji $\mathbf{\Delta}$ iz prejšnjih treh primerov. Lahko pa primerjamo oba ostala vektorja, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{I}}$, ki tudi tu dobita enake vrednosti kot v poglavju 1.6.1. Izračunajmo še neznanko $\mathbf{x}$, torej površino S :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 17\,690,9 \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-53)$$

Površino S iz enačbe (1-53) pa lahko primerjamo z izračunano površino iz poglavja 1.6.1 (enačba (1-34)), kjer ugotovimo, da dobimo povsem enako vrednost.

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{I}\hat{I}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Ker imamo samo eno neznanko, je matrika $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ enaka:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 9\,901,031 \end{bmatrix} \quad (1-54)$$

Za matriki $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{I}\hat{I}}$ glej poglavje 1.6.1, enačbi (1-28) in (1-29).

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{I}\hat{I}}$.

Kovariančna matrika neznank $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ ima samo en element, to je varianco σ_S^2 in ima vrednost:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 3,960 \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-55)$$

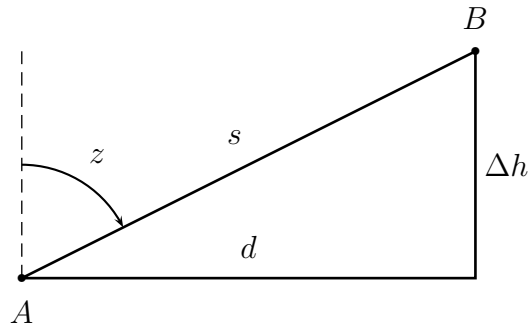
Za matriki $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{I}\hat{I}}$ glej poglavje 1.6.1, enačba (1-30).

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Izračunali bomo natančnost neznanke, to je $\sigma_S = 1,99$ m, kjer dobimo enako vrednost kot v primeru enačbe (1-35). Za ostale rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbi (1-32) in (1-33).

1.7 Primer 2 – višina reperja

Dano imamo višino izhodiščnega reperja A , in sicer $H_A = 320,00$ m. Da bi določili višino reperja B smo s trigonometričnim višinomerstvom opazovali poševno dolžino $s = 51,00$ m in zenitno razdaljo $z = 78^\circ 40'$, z geometričnim nivelmanom višinsko razliko $\Delta h = 10,00$ m, izmerili pa smo tudi horizontalno dolžino $d = 50,00$ m, kot to prikazuje slika 1–2. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave izravnavaj opazovanja in določi višino reperja B s pripadajočo natančnostjo σ_{H_B} .



Slika 1–2: Prikaz izmerjenih opazovanj za določitev višine novega reperja

Rešitev bomo dobili po korakih, ki so predstavljeni v poglavju 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz naloge vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanj (s , d , Δh in z) v pravokotnem trikotniku, kjer bi potrebovali samo $n_0 = 2$ opazovanj za enolično rešitev. To pomeni, da imamo $r = n - n_0 = 2$ nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s \\ d \\ \Delta h \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1-56)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

V tem primeru si bomo izbrali $u = 1$ neznanko, in sicer točno tisto, po čemer nas sprašuje naloga, neznanka naj bo višina H_B . Njeno približno vrednost bomo izračunali iz opazovanj, zato je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} H_{B,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330,00 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-57)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 2$ in $u = 1$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 2 + 1 = 3$. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta \hat{h}^2 + \hat{d}^2 - \hat{s}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv H_B - \Delta \hat{h} - H_A = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d} - \hat{s} \sin \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (1-58)$$

V enačbah (1–58) nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$.

Enačbe (1–58) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1–58) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–56). Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s} & \frac{\partial F_1}{\partial d} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial s} & \frac{\partial F_2}{\partial d} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial s} & \frac{\partial F_3}{\partial d} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta h} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s & 2d & 2\Delta h & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin z & 1 & 0 & -s \cos z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -102,000 & 100,000 & 20,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & -1,000 & 0,000 \\ -0,981 & 1,000 & 0,000 & -10,022 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-59)$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1–58) po neznanki, višini H_B :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_B} \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_B} \\ \frac{\partial F_3}{\partial H_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-60)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1–58) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} s^2 - d^2 - \Delta h^2 \\ H_A + \Delta h - H_{B,0} \\ s \sin z - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0055 \end{bmatrix} \quad (1-61)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, kjer dobimo:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0,0010 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,0049 \text{ m} \\ 0,0048 \text{ m} \\ 0,0010 \text{ m} \\ 0,0004 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 50,9951 \text{ m} \\ 50,0048 \text{ m} \\ 10,0010 \text{ m} \\ 1,3734 \end{bmatrix} \quad (1-62)$$

V enačbi (1–62) je popravek v_z izračunan v radianih, njegova vrednost v ločnih minutah pa je $v_z = 1,40'$. Tudi izravnana zenitna razdalja $\hat{z}$ je v enačbi (1–62) podana v radianih, v ločnih enotah pa je enaka $\hat{z} = 78^\circ 41,40'$.

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe (1–57) in popravkov približnih vrednosti neznank Δ iz enačbe (1–62) izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 330,0010 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-63)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\tilde{u}\tilde{u}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 9,804 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} 5,001 \times 10^{-1} & -4,903 \times 10^{-1} & -9,806 \times 10^{-2} & -1,340 \times 10^{-5} \\ -4,903 \times 10^{-1} & 4,807 \times 10^{-1} & 9,606 \times 10^{-2} & -3,849 \times 10^{-3} \\ -9,806 \times 10^{-2} & 9,606 \times 10^{-2} & 1,960 \times 10^{-2} & 1,918 \times 10^{-2} \\ -1,340 \times 10^{-5} & -3,849 \times 10^{-3} & 1,918 \times 10^{-2} & 9,996 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{u}\tilde{u}} &= \begin{bmatrix} 4,999 \times 10^{-1} & 4,903 \times 10^{-1} & 9,806 \times 10^{-2} & 1,340 \times 10^{-5} \\ 4,903 \times 10^{-1} & 5,193 \times 10^{-1} & -9,606 \times 10^{-2} & 3,849 \times 10^{-3} \\ 9,806 \times 10^{-2} & -9,606 \times 10^{-2} & 9,804 \times 10^{-1} & -1,918 \times 10^{-2} \\ 1,340 \times 10^{-5} & 3,849 \times 10^{-3} & -1,918 \times 10^{-2} & -1,918 \times 10^{-2} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1-64)$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 2,412 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,005 \text{ m}\end{aligned}\quad (1-65)$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\tilde{u}\tilde{u}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank $\Sigma_{\Delta\Delta}$:

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 2,364 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \end{bmatrix}\quad (1-66)$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Izračunajmo natančnosti neznanke, σ_{H_B} :

$$\sigma_{H_B} = 0,0049 \text{ m}\quad (1-67)$$

Izračunajmo tudi natančnosti popravkov opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{v_s} = 0,0035 \text{ m} \quad \sigma_{v_d} = 0,0034 \text{ m} \quad \sigma_{v_{\Delta h}} = 0,0007 \text{ m} \quad \sigma_{v_z} = 16,88'\quad (1-68)$$

Na koncu še natančnosti izravnanih opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{\hat{s}} = 0,0035 \text{ m} \quad \sigma_{\hat{d}} = 0,0035 \text{ m} \quad \sigma_{\Delta \hat{h}} = 0,0049 \text{ m} \quad \sigma_{\hat{z}} = 0,33'\quad (1-69)$$

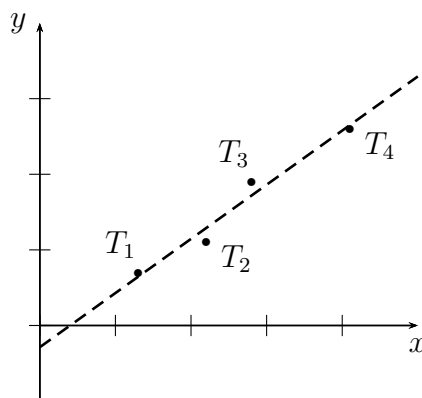
1.8 Primer 3 – premica v ravnini, opazovani obe koordinati točk

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x , kot tudi koordinate y , vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1–1.

Preglednica 1–1: Opazovane vse koordinate štirih točk na premici

Točka	x	y
T_1	1,3	0,7
T_2	2,2	1,1
T_3	2,8	1,9
T_4	4,1	2,6

Točke v ravnini prikazuje slika 1–3. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnavaj opazovanja in določi premico, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1–3: Točke premice v ravnini

Primer, ki ga obravnavamo je praktični identičen primeru 7 pri poglavju *Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri MNK*. Tudi tu bomo podrobno raziskali predvsem količino n_0 , zato se bo katera izmed enačb ponovila. Poudarek tu pa bo v tem, da bo rešitev s splošnim modelom veliko bolj enostavna, kot s posrednim modelom izravnave.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n = 8$, opazovane imamo tako 4 koordinate x in 4 koordinate y . Vektor opazovanj nastavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,7 \\ 2,2 \\ 1,1 \\ 2,8 \\ 1,9 \\ 4,1 \\ 2,6 \end{bmatrix} \quad (1-70)$$

Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, velja $\mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I}_{8 \times 8}$.

Kako določimo n_0 ? Tu bomo privzeli enako logiko, kot pri prej omenjenem primeru 7 poglavja *Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri MNK*, ko smo nalogo rešili s posredno izravnavo po MNK. Tam smo ugotovili, da bi morali uvesti dve neznanki, s katerima bomo parametrizirali premico, torej a (naklonski koeficient) in b (prosti člen). Dodatno pa bi morali za vsako merjeno koordinato x_i uvesti neznanko p_i , kar skupaj zneso dodatnih 4 neznanke p_1, p_2, p_3 in p_4 . Število neznank bi pri tem bilo:

$$u = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1, p_2, p_3, p_4} = 6 \quad (1-71)$$

Ker pa vemo, da pri posredni izravnavi velja, $u = n_0$, smo s tem definirali tudi minimalno število opazovanj, ki jih nujno potrebujemo za rešitev problema.

Na koncu tako lahko zapišemo:

- število opazovanj: $n = 8$,
- minimalno število opazovanj je: $n_0 = 6$,
- število nadštevilnih opazovanj je: $r = 2$.

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Ker želimo določiti parametre premice, ki se optimalno prilega izmerjenim točkam, bomo uvedli $u = 2$ neznank, torej parametra a in b . Približne vrednosti neznank bomo izračunali iz opazovanj, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 - a_0 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4444 \\ 0,1222 \end{bmatrix} \quad (1-72)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 2$ in $u = 2$, je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 2 + 2 = 4$. Vidimo, da moramo sestaviti toliko enačb, kot imamo izmerjenih točk. Za vsako točko uporabimo enačbo premice in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\hat{x}_1 - b = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\hat{x}_2 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\hat{x}_3 - b = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - a\hat{x}_4 - b = 0 \end{aligned} \quad (1-73)$$

Vidimo, da v enačbah (1-73) nastopajo vsa opazovanja in tudi obe uvedeni neznanki, kar pomeni, da enačbe (1-73) predstavljajo pravilen niz enačb za naš primer.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbe (1-73) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = 4 \times 8$, matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times u = 4 \times 2$

in vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = 4 \times 1$. Matriko $\mathbf{A}$ dobimo z odvajanjem vseh enačb iz (1-73) po vseh opazovanjih iz (1-70):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial y_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial y_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial y_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} & \frac{\partial F_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,444 & 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & -0,444 & 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -0,444 & 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -0,444 & 1,000 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-74)$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-73) po obeh neznankah, torej:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & -1 \\ -x_2 & -1 \\ -x_3 & -1 \\ -x_4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,3 & -1,0 \\ -2,2 & -1,0 \\ -2,8 & -1,0 \\ -4,1 & -1,0 \end{bmatrix} \quad (1-75)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo iz enačb (1-73) tako, da jih prenesemo na desno stran in uporabimo približne vrednosti neznank ter merjena opazovanja. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0 x_1 + b_0 - y_1 \\ a_0 x_2 + b_0 - y_2 \\ a_0 x_3 + b_0 - y_3 \\ a_0 x_4 + b_0 - y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ -0,533 \\ -0,656 \end{bmatrix} \quad (1-76)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le izračunan vektor popravkov približnih vrednosti neznank Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0,2633 \\ -0,3873 \end{bmatrix} \quad (1-77)$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe (1-72) in popravkov približnih vrednosti neznank Δ iz enačbe (1-77) izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 0,7077 \\ -0,2651 \end{bmatrix} \quad (1-78)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\tilde{t}\tilde{t}}$. Matrika kofaktorjev neznank je:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 2,893 \times 10^{-1} & -7,521 \times 10^{-1} \\ -7,521 \times 10^{-1} & 2,255 \end{bmatrix} \quad (1-79)$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 3,084 \times 10^{-2} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,176 \end{aligned} \quad (1-80)$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\tilde{t}\tilde{t}}$.

Za izračun vseh kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank:

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 8,919 \times 10^{-3} & -2,319 \times 10^{-2} \\ -2,319 \times 10^{-2} & 6,953 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-81)$$

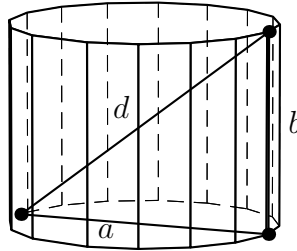
8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Prikažimo natančnosti in korelacijo med obema neznankama:

$$\sigma_a = 0,094 \quad \sigma_b = 0,264 \quad \rho_{ab} = -0,931 \quad (1-82)$$

1.9 Primer 4 – opazovanja v valju

V valju smo izmerili tri količine (glej sliko 1–4): premer osnovne ploskve $a = 10,0$ m, višino $b = 20,0$ m in prostorsko diagonalo $d = 22,0$ m. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj, koliko litrov soka (beri piva) bi lahko pretočili v valj. Izračunajte tudi natančnost določitve količine soka.



Slika 1–4: Skica valja in opazovanj

Rešitev bomo tudi tu dobili po korakih, ki so predstavljeni v poglavju 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz naloge vidimo, da imamo $n = 3$ opazovanj (a , b in d) v valju, kjer geometrijo lahko prikažemo v pravokotnem trikotniku. Nujno bi potrebovali samo $n_0 = 2$ opazovanj, to pomeni, da imamo $r = n - n_0 = 1$ nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1-83)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

V tem primeru si bomo izbrali $u = 1$ neznanko, in sicer točno tisto, po čemer nas sprašuje naloga, neznanka naj bo torej prostornina valja V . Njeno približno vrednost bomo izračunali iz opazovanj, zato je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi a^2 b}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,570,80 \text{ m}^3 \end{bmatrix} \quad (1-84)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 1$ in $u = 1$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 1 + 1 = 2$. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \pi \hat{a}^2 \hat{b} - 4V = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2 \end{aligned} \quad (1-85)$$

V enačbah (1–85) nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$.

Enačbe (1–85) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1–85) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–83). Dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial d} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi ab & \pi a^2 & 0 \\ 2a & 2b & -2d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\,256,637 & 314,159 & 0,000 \\ 20,000 & 40,000 & -44,000 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1-86)$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1–85) po neznanki, prostornini V :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial V} \\ \frac{\partial F_2}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (1-87)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1–85) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 4V - \pi a^2 b \\ d^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0000 \text{ m}^3 \\ -16,0000 \text{ m}^2 \end{bmatrix}\quad (1-88)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, kjer dobimo:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -38,31 \text{ m}^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,08 \text{ m} \\ -0,16 \text{ m} \\ 0,18 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 9,92 \text{ m} \\ 19,84 \text{ m} \\ 22,18 \text{ m} \end{bmatrix}\quad (1-89)$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe (1–84) in popravkov približnih vrednosti neznank Δ iz enačbe (1–89) izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 1\,532,48 \text{ m}^3 \end{bmatrix}\quad (1-90)$$

Če izravnano prostornino V iz enačbe (1–90) zapišemo v litrih, pa dobimo $V = 1\,532\,484 \text{ L}$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 8,230 \times 10^4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} 1,016 \times 10^{-1} & 2,033 \times 10^{-1} & -2,236 \times 10^{-1} \\ 2,033 \times 10^{-1} & 4,065 \times 10^{-1} & -4,472 \times 10^{-1} \\ -2,236 \times 10^{-1} & -4,472 \times 10^{-1} & 4,919 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} &= \begin{bmatrix} 8,984 \times 10^{-1} & -2,033 \times 10^{-1} & 2,236 \times 10^{-1} \\ -2,033 \times 10^{-1} & 5,935 \times 10^{-1} & 4,472 \times 10^{-1} \\ 2,236 \times 10^{-1} & 4,472 \times 10^{-1} & 5,081 \times 10^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1-91)$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 6,504 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,255 \text{ m}\end{aligned}\tag{1-92}$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\tilde{u}\tilde{u}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank $\Sigma_{\Delta\Delta}$:

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 5,353 \times 10^3 \text{ m}^6 \end{bmatrix}\tag{1-93}$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Izračunajmo natančnost prostornine valja σ_V :

$$\sigma_V = 73,16 \text{ m}^3 = 73\,161,74 \text{ L}\tag{1-94}$$

Izračunajmo tudi natančnosti popravkov opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{v_a} = 0,081 \text{ m} \quad \sigma_{v_b} = 0,163 \text{ m} \quad \sigma_{v_d} = 0,179 \text{ m}\tag{1-95}$$

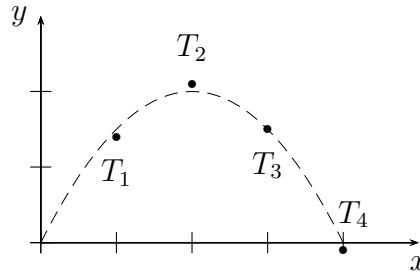
Na koncu še natančnosti izravnanih opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{\hat{a}} = 0,242 \text{ m} \quad \sigma_{\hat{b}} = 0,196 \text{ m} \quad \sigma_{\hat{d}} = 0,182 \text{ m}\tag{1-96}$$

Primerjajte rezultate te naloge z rezultati posredne izravnave (glej primer pri posredni izravnavi lansko leto). Dobimo malo drugačne rezultate, a so razlike veliko manjše kot je ocenjena natančnost rezultatov. Pojavijo pa se zaradi linearizacije nelinearnih enačb v osnovni matrični model tako splošnega kot tudi posrednega modela izravnave po MNK.

1.10 Primer 5 – točke na paraboli

V ravnini smo izmerili koordinate x in y štirim točkam in dobili: $T_1(1,0; 1,4)$, $T_2(2,0; 2,1)$, $T_3(3,0; 1,5)$ in $T_4(4,0; -0,1)$. Če so koordinate y izmerjene dvakrat bolj natančno kot koordinate x , s splošnim modelom izravnave po MNK določite parametre parabole tako, da gre parabola skozi izhodišče koordinatnega sistema in se optimalno prilega točkam.



Slika 1–5: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

Obravnavana naloga je zelo podobna nalogi, ko smo točkam v ravnini ocenjevali parametre optimalne premice (glej poglavje 1.8), v svojem smislu je praktično enaka, le da imamo tu malo drugačno obliko interpolacijske krivulje. Pri premici smo prvo morali ugotoviti, koliko je minimalno število opazovanj, ki jih potrebujemo za izračun primera, zato bomo morali tudi tu narediti enako. Na voljo imamo $n = 8$ opazovanj, opazovane imamo tako 4 koordinate x kot tudi 4 koordinate y . Enačba parabole, ki gre skozi središče ima obliko $y = ax^2 + bx$, kar bomo seveda uporabili pri sestavi enačb splošnega modela izravnave. Vidimo, da moramo uvesti dve neznanki, ki se nanašata na parabolo (a in b). Če gledamo analogijo z nalogo s premico, bi enačbo parabole pri posredni izravnavi lahko uporabili le za opazovane koordinate y , kjer pa na desni strani ne sme biti opazovanj koordinat x . Zato bi pri posredni izravnavi morali tudi tu za vsako merjeno koordinato x uvesti eno novo neznanke (p_1, p_2, p_3, p_4). Zato je pri tej nalogi število nadštevilnih opazovanj enako:

$$u = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1, p_2, p_3, p_4} = 6 \quad (1-97)$$

Sedaj lahko postopamo po korakih splošnega modela izravnave. Rezultate pa bomo predstavili na sledeč način. V prvem delu bodo nastavljeni vsi podatki za izračun rezultatov. Nato pa bomo izvedli nekaj iteracij izravnave in prikazali rezultate po opravljenih iteracijah.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n = 8$, in vektor opazovanj nastavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,4 \\ 2,0 \\ 2,1 \\ 3,0 \\ 1,5 \\ 4,0 \\ -0,1 \end{bmatrix} \quad (1-98)$$

Ker so koordinate y opazovane dvakrat bolj natančno, potem za vsako točko lahko nastavimo kofaktorja opazovanj:

$$q_{x_i} = 4 \quad q_{y_i} = 1 \quad i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (1-99)$$

Matriko uteži $\mathbf{P}$ dobimo kot $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$.

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Za neznanki nastavimo parametra parabole a in b , kjer jima približno vrednost nastavimo kot:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-100)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 2$ in $u = 2$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 2 + 2 = 4$. Vidimo, da tudi v tem primeru za vsako izmerjeno točko sestavimo eno enačbo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\hat{x}_1^2 - b\hat{x}_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\hat{x}_2^2 - b\hat{x}_2 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\hat{x}_3^2 - b\hat{x}_3 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - a\hat{x}_4^2 - b\hat{x}_4 = 0 \end{aligned} \quad (1-101)$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbe (1-101) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = 4 \times 8$, matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times u = 4 \times 2$ in vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = 4 \times 1$. Matriko $\mathbf{A}$ dobimo z odvajanjem vseh enačb iz (1-101) po vseh opazovanjih iz (1-98):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial y_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial y_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial y_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} & \frac{\partial F_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2a_0x_1 - b_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_0x_2 - b_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0x_3 - b_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0x_4 - b_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-102) \\ &= \begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-101) po obeh neznankah, torej:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 & -x_1 \\ -x_2^2 & -x_2 \\ -x_3^2 & -x_3 \\ -x_4^2 & -x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0 & -1,0 \\ -4,0 & -2,0 \\ -9,0 & -3,0 \\ -16,0 & -4,0 \end{bmatrix} \quad (1-103)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo iz enačb (1–101), da le-te prenesemo na desno stran in uporabimo približne vrednosti neznank in merjena opazovanja. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0 x_1^2 + b_0 x_1 - y_1 \\ a_0 x_2^2 + b_0 x_2 - y_2 \\ a_0 x_3^2 + b_0 x_3 - y_3 \\ a_0 x_4^2 + b_0 x_4 - y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,400 \\ -2,100 \\ -1,500 \\ 0,100 \end{bmatrix} \quad (1-104)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

V prvem koraku izračunamo vektor popravkov približnih vrednosti neznank Δ , ki ga prištejemo vektorju približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ in dobimo vektor končnih vrednosti neznank $\mathbf{x}$. Sedaj pa za približne vrednosti ($\mathbf{x}_0$) privzamemo izravnane vrednosti ($\mathbf{x}$) in postopek ponovimo. Dobljeni rezultati predstavljajo rezultate 2. iteracije. Postopek ponavljamo vse dokler npr. $\|\Delta\| > 1,000 \times 10^{-6}$. Rešitve vektorja Δ so:

$$\text{Iteracija 1: } \delta a = -0,514516 \quad \delta b = 2,038387 \quad \|\Delta\| = 2,10$$

$$\text{Iteracija 2: } \delta a = -0,011549 \quad \delta b = 0,049690 \quad \|\Delta\| = 5,10 \times 10^{-2}$$

$$\text{Iteracija 3: } \delta a = -0,000331 \quad \delta b = 0,001138 \quad \|\Delta\| = 1,19 \times 10^{-3}$$

$$\text{Iteracija 4: } \delta a = -0,000002 \quad \delta b = 0,000012 \quad \|\Delta\| = 1,24 \times 10^{-5}$$

$$\text{Iteracija 5: } \delta a = 0,000000 \quad \delta b = 0,000000 \quad \|\Delta\| = 5,17 \times 10^{-7}$$

Vidimo, da smo morali izvesti 5 iteracij, da sta popravka obeh neznank (δa in δb) zanemarljivo majhna, da lahko končamo iterativni postopek. Vzrok za nujno obdelavo v več iteracijah je v tem, da so enačbe iz (1–101) nelinearne, saj vsebujejo produkte in kvadrate opazovanj in neznank. Končni rezultat, to sta ocenjena parametra premice a in b , lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} -0,52640 \\ 2,08923 \end{bmatrix} \quad (1-105)$$

6. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$.

Za izračun vseh kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank:

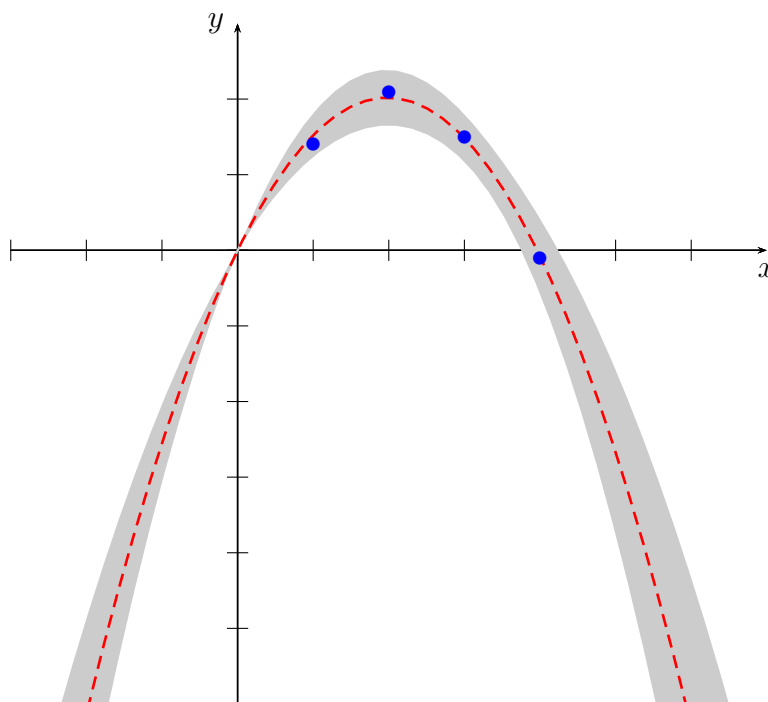
$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 8,032 \times 10^{-4} & -1,982 \times 10^{-3} \\ -1,982 \times 10^{-3} & 5,342 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (1-106)$$

7. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Prikažimo natančnosti in korelacijo med obema neznankama:

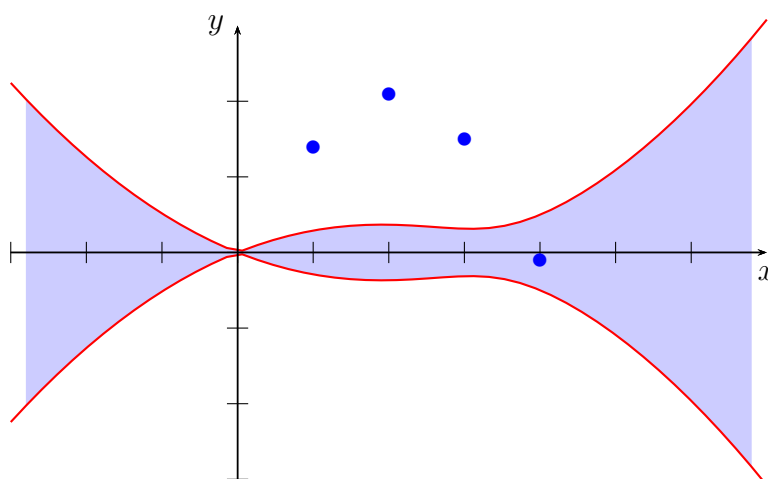
$$\sigma_a = 0,028 \quad \sigma_b = 0,073 \quad \rho_{ab} = -0,957 \quad (1-107)$$

Na koncu izrišimo še graf (glej sliko 1–6), ki ponazarja opazovanja (točke v ravnini), izravnano parabolo (rdeča črtkana črta) in območje zaupanja interpoliranih vrednosti (sivo območje). Podobno smo tak izris naredili za premico (opazovane samo y koordinate, primer 2) pri poglavju *Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri MNK*.



Slika 1-6: Opazovanja, optimalna parabola in natančnost interpolacije in ekstrapolacije

S slike 1-6 lahko vidimo, da imamo eno dano točko, to je izhodišče koordinatnega sistema. Ker parabola **mora** iti skozi izhodišče (prosti člen je enak nič), je tam izračunan standardni odklon interpolirane vrednosti enak nič. Z oddaljevanjem pa natančnost pada. V območju podatkov (interpolacija) je natančnost še dokaj enaka, z oddaljevanjem od območja podatkov, pa se natančnost slabša. Ker pa se krivulji (paraboli) z oddaljevanjem od temena naklon povečuje, je območje zaupanja (sivo območje) na pogled pristransko. Zato je na sliki 1-7 prikazano območje zaupanja za vsako interpolirano točko brez parabole.

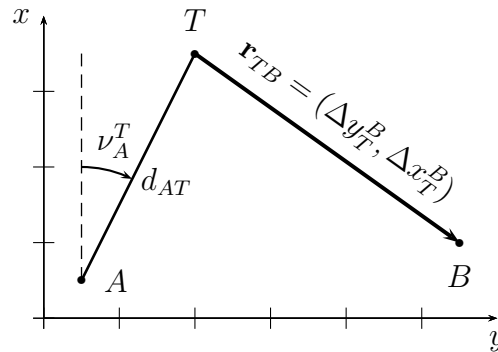


Slika 1-7: Prikaz natančnosti interpoliranih točk

S slike 1-7 lahko vidimo, kako drastično pade kakovost interpoliranih točk, če gremo izven območja podatkov (opazovanih točk, ki so prikazane z modrimi krogci), torej če delamo ekstrapolacijo. V številnih znanstvenih panogah tako problem kakovosti ekstrapolacije še vedno predstavlja velik problem.

1.11 Primer 6 – Ravninska geodetska mreža (1)

Podane imamo koordinate dveh danih točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 10,0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100,0 \text{ m}, 20,0 \text{ m})$. Da bi določili koordinate točke $T(y_T, x_T)$, smo na točki A izmerili smerni kot $\nu_A^T = 30^\circ 57'$ in dolžino $d_{AT} = 58,3 \text{ m}$, na točki T pa bazni vektor $\mathbf{r}_{TB} = (\Delta y_T^B, \Delta x_T^B) = (60,0 \text{ m}, -40,0 \text{ m})$ proti točki B , kot to prikazuje slika 1–8. Če je natančnost smerne kota enaka $\sigma_{\nu_A^T} = 15,0''$ in če je natančnost vseh ostalih dolžinskih količin enaka $\sigma_D = 4,0 \text{ mm}$, s splošnim modelom izravnave izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$. Rešite tudi stohastični model izravnave in določite natančnost ocenjenih koordinat točke T in parametre standardne absolutne elipse pogreškov točke T . Pri izračunu natančnosti uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2 .



Slika 1–8: Določitev koordinat nove točke na osnovi danih točk, smerne kota, dolžine in baznega vektorja

Nalogo smo obravnavali tudi pri poglavju *Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri MNK*, razlika je le, da imamo sedaj različne natančnosti opazovanj. Pokazali bomo, kako lahko poenostavimo sestavljene enačbe in posledično izračun naloge z uporabo splošnega modela izravnave.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanj, kjer želimo določiti koordinati y_T in x_T točke T , torej $n_0 = 2$ in $r = n - n_0 = 2$. Natančnosti opazovanj so za dolžinska opazovanja enaka, podana pa je tudi natančnost izmerjenega smerne kota, zato bosta vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajoča kovariančna matrika Σ enaki:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_{AT} \\ \nu_A^T \\ \Delta y_T^B \\ \Delta x_T^B \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\nu_A^T}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_D^2 \end{bmatrix} \quad (1-108)$$

Če nastavimo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_D^2$, bodo kofaktorji in uteži opazovanj enaki:

$$q_D = 1,0000 \quad q_{\nu_A^T} = 3,3053 \times 10^{-4} \quad p_D = 1,0000 \quad p_{\nu_A^T} = 3,0254 \times 10^3 \quad (1-109)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Za neznanki si izberemo koordinati točke T , torej y_T in x_T in na ta način definiramo vektor neznank $\mathbf{x}$ in s tem $u = 2$. Iz opazovanj izračunamo približne vrednosti neznank in dobimo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - \Delta y_T^B \\ x_B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,00 \text{ m} \\ 60,00 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-110)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 2$ in $u = 2$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 2 + 2 = 4$. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv y_T - y_A - \hat{d}_{AT} \sin \hat{\nu}_A^T = 0 \\ F_2 &\equiv x_T - x_A - \hat{d}_{AT} \cos \hat{\nu}_A^T = 0 \\ F_3 &\equiv y_T + \Delta \hat{y}_T^B - y_B = 0 \\ F_4 &\equiv x_T + \Delta \hat{x}_T^B - x_B = 0 \end{aligned} \quad (1-111)$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbe (1-111) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-111) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1-108). Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_1}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta x_T^B} \\ \frac{\partial F_2}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_2}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta x_T^B} \\ \frac{\partial F_3}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_3}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta x_T^B} \\ \frac{\partial F_4}{\partial d_{AT}} & \frac{\partial F_4}{\partial \nu_A^T} & \frac{\partial F_4}{\partial \Delta y_T^B} & \frac{\partial F_4}{\partial \Delta x_T^B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \nu_A^T & -d_{AT} \cos \nu_A^T & 0 & 0 \\ -\cos \nu_A^T & d_{AT} \sin \nu_A^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,5143 & -49,9990 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,8576 & 29,9831 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-112)$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-111) po obeh neznankah, koordinatah y_T in x_T :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \\ 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (1-113)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1-111) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} d_{AT} \sin \nu_A^T - y_T + y_A \\ d_{AT} \cos \nu_A^T - x_T + x_A \\ y_B - \Delta y_T^B + y_B \\ x_B - \Delta x_T^B + x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0169 \text{ m} \\ -0,0010 \text{ m} \\ 0,0000 \text{ m} \\ 0,0000 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-114)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, kjer dobimo:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0,0081 \text{ m} \\ -0,0007 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,0048 \text{ m} \\ 0,0001270 \\ 0,0081 \text{ m} \\ 0,0007 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 58,3048 \text{ m} \\ 0,5403065 \\ 60,0081 \text{ m} \\ -39,9993 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-115)$$

V enačbi (1-115) sta popravek $v_{\nu_A^T}$ in izravnana vrednost $\hat{\nu}_A^T$ podana v radianih. Zapišemo ju lahko tudi $v_{\nu_A^T} = 26''$ in $\hat{\alpha} = 30^\circ 57' 26''$.

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe (1-110) in popravkov približnih vrednosti neznank Δ iz enačbe (1-115) izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 39,9919 \text{ m} \\ 59,9993 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-116)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$: Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 6,880 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \quad (1-117)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,008 \text{ m}$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 . Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T , korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = 2,89 \text{ mm} \quad \sigma_{x_T} = 2,85 \text{ mm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0,02 \quad (1-118)$$

Izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na točki T :

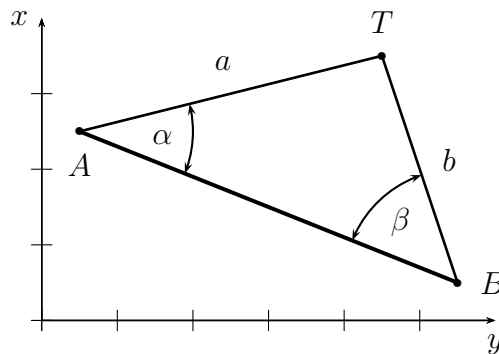
$$a = 2,91 \text{ mm} \quad b = 2,83 \text{ mm} \quad \theta = -30,95^\circ \quad (1-119)$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
d_{AT}	4,8 mm	2,8 mm	58,3048 m	2,8 mm
ν_A^T	26,2''	10,9''	30°57'26,2''	10,3''
Δy_T^B	8,1 mm	2,8 mm	58,3048 m	2,9 mm
Δx_T^B	0,7 mm	2,8 mm	58,3048 m	2,9 mm

1.12 Primer 7 – Ravninska geodetska mreža (2)

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (5,0 \text{ m}, 10,0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (20,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$. Da bi določili položaj točke T , smo s točke A opazovali dolžino $a = 16,2 \text{ m}$ ($\sigma_a = 0,1 \text{ m}$) in kot $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13,2 \text{ m}$ ($\sigma_b = 0,1 \text{ m}$) in kot $\beta = 60^\circ$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1–9. S splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T, x_T)$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Izračunajte tudi parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T . Uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2 .



Slika 1–9: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja nove točke

Tudi to nalogo smo že rešili v okviru poglavja *Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri MNK*, kjer smo prikazali pogojno izravnavo po MNK, predvsem zaradi enostavne rešitve izravnave v primerjavi s posredno izravnavo. Tu podajamo rešitev s splošnim modelom izravnave, kjer bomo ohranili enostavnost izračuna in hkrati dobili že v postopku izravnave izravnane koordinate točke T .

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Da bi določili koordinate točke T smo izmerili $n = 4$ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 = 2$ opazovanj, zato imamo $r = 2$ nadštevilnih opazovanj. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajoča kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ sta:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \quad (1-120)$$

Če nastavimo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$, bodo kofaktorji in uteži opazovanj enaki:

$$\begin{aligned} q_a = q_b &= 1,3131 \times 10^2 & q_\alpha = q_\beta &= 1,0000 \\ p_a = p_b &= 7,6154 \times 10^{-3} & p_\alpha = p_\beta &= 1,0000 \end{aligned} \quad (1-121)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Za neznanki si izberemo koordinati točke T , torej y_T in x_T in na ta način definiramo vektor neznank $\mathbf{x}$ in s tem $u = 2$. Iz opazovanj izračunamo približne vrednosti neznank in dobimo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A + a \sin(\nu_A^B - \alpha) \\ x_A + a \cos(\nu_A^B - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,885 \text{ m} \\ 13,177 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-122)$$

V enačbi (1-122) je smerni kot $\nu_A^B = 123^\circ 41' 24''$.

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 2$ in $u = 2$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 2 + 2 = 4$. Sestavljene enačbe so:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} \sin \hat{\alpha} - \hat{b} \sin \hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b} \cos(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - D^2 \\ F_3 &\equiv \hat{a}^2 - (y_T - y_A)^2 - (x_T - x_A)^2 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{b}^2 - (y_T - y_B)^2 - (x_T - x_B)^2 = 0 \end{aligned} \quad (1-123)$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbe (1-123) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-123) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1-120). Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin \alpha & a \cos \alpha & -\sin \beta & -b \cos \beta \\ 2a + 2b \cos(\alpha + \beta) & -2ab \sin(\alpha + \beta) & 2b + 2a \cos(\alpha + \beta) & -2ab \sin(\alpha + \beta) \\ 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \end{bmatrix} \quad (1-124) \\ &= \begin{bmatrix} 0,7071 & 11,4551 & -0,8660 & -6,6000 \\ 25,5672 & -413,1072 & 18,0143 & -413,1072 \\ 32,4000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 26,4000 & 0,0000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-123) po obeh neznankah, koordinatah y_T in x_T :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2(y_T - y_A) & -2(x_T - x_A) \\ -2(y_T - y_B) & -2(x_T - x_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 \\ -31,771 & -6,354 \\ -1,771 & -26,354 \end{bmatrix} \quad (1-125)$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1–123) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0,0236 \text{ m} \\ -0,9883 \text{ m}^2 \\ 0,0000 \text{ m}^2 \\ 0,1794 \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-126)$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le vektor Δ in vektor končnih koordinat točke T :

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0,0155 \text{ m} \\ -0,0022 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 20,8699 \text{ m} \\ 13,1749 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-127)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 2,1450 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,0015 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-128)$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 . Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T , korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = 7,61 \text{ cm} \quad \sigma_{x_T} = 8,13 \text{ cm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0,07 \quad (1-129)$$

Izračunajmo še parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T :

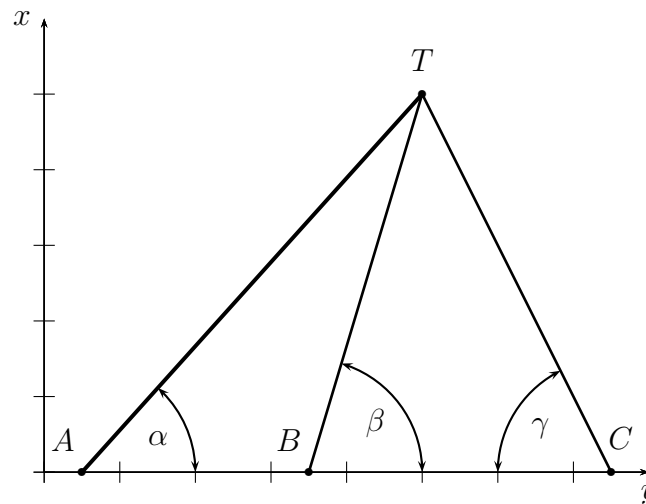
$$a = 20,19 \text{ cm} \quad b = 18,32 \text{ cm} \quad \theta = -66,39^\circ \quad (1-130)$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
a	-1,6 cm	6,6 cm	16,1844 m	7,5 cm
b	0,4 cm	5,9 cm	13,2036 m	8,1 cm
α	0,2'	24,4'	45,0°0,2'	17,4'
β	5,3'	22,4'	60,0°5,3'	19,9'

1.13 Primer 8 – Ravninska geodetska mreža (3) – opazovani koti

V ravnini imamo podane položaje treh danih točk, ki ležijo na osi y , in sicer: $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$, $B(y_B, x_B) = (50,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$ in $C(y_C, x_C) = (120,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$. Da bi določili položaj točke T , smo na točki A opazovali kot $\alpha = 37^\circ 39'$, na točki B kot $\beta = 64^\circ 57'$ in na točki C kot $\gamma = 45^\circ 28'$, kot to prikazuje slika 1–10. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnajte opazovanja, izračunajte koordinate točke T , natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} in korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ ter parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T .



Slika 1–10: Opazovani koti za določitev položaja nove točke

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Da bi določili koordinate točke T smo izmerili $n = 3$ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 = 2$ opazovanj, zato imamo $r = 1$ nadštevilnih opazovanj. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriki $\mathbf{Q}$ ter $\mathbf{P}$, pri tem, da so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana:

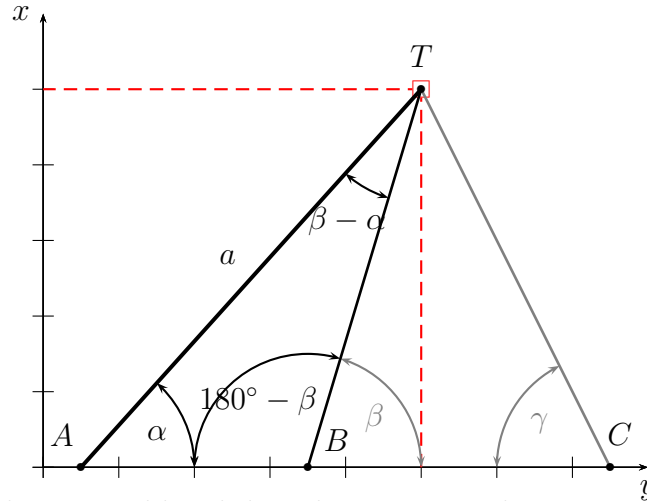
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1-131)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Za neznanki si izberemo koordinati točke T , torej y_T in x_T in na ta način definiramo vektor neznank $\mathbf{x}$ in s tem $u = 2$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad (1-132)$$

Izračunajmo približne vrednosti neznank. S slike 1–10 vidimo, da imamo načeloma tri možnosti izračuna koordinat s postopkom zunanega ureza. Za naš izračuna uporabimo točki A in B ter opazovanji α in β , kot to prikazuje slika 1–11.



Slika 1–11: Določitev približnih koordinat nove točke na osnovi zunanega ureza

V prvem koraku izračunamo kot na točki T , ki je enak $\beta - \alpha$, nato pa s sinusnim izrekom izračunamo stranico a , pri tem, da izhajamo iz znane dolžine d_{AB} . Dobimo:

$$a = d_{AB} \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = 79,009 \text{ m} \quad (1-133)$$

Za izračun približnih vrednosti neznank uporabimo koordinate točke A , merjen kot α in dolžino a iz enačbe (1–133):

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A + a \cos(\alpha) \\ x_A + a \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72,556 \text{ m} \\ 48,262 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-134)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 1$ in $u = 2$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 1 + 2 = 3$. Za sestavo enačb izhajamo iz enačb pravokotnega trikotnika, ki ga sestavlja točka i ($i = \{A, B, C\}$) in točka T . Enačbe, ki jih dobimo so (izpeljite sami):

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv (y_T - y_A) \tan \hat{\alpha} - x_T = 0 \\ F_2 &\equiv (y_T - y_B) \tan \hat{\beta} - x_T = 0 \\ F_3 &\equiv (y_C - y_T) \tan \hat{\gamma} - x_T = 0 \end{aligned} \quad (1-135)$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbe (1–135) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1–135) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–131).

Dobimo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{y_T - y_A}{\cos^2 \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_T - y_B}{\cos^2 \beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_C - y_T}{\cos^2 \gamma} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 99,7898 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 125,8183 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 96,4590 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1-136}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-135) po obeh neznankah, koordinatah y_T in x_T :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan \alpha & -1 \\ \tan \beta & -1 \\ -\tan \gamma & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,771 & -1,000 \\ 2,140 & -1,000 \\ -1,016 & -1,000 \end{bmatrix} \tag{1-137}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1-135) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0,0000 \text{ m} \\ 0,0000 \text{ m} \\ 0,0386 \text{ m} \end{bmatrix} \tag{1-138}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le vektor Δ in vektor končnih koordinat točke T :

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0,0138 \text{ m} \\ -0,0206 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 72,5423 \text{ m} \\ 48,2411 \text{ m} \end{bmatrix} \tag{1-139}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, kjer bomo referenčni standardni odklon $\hat{\sigma}_0$ zapisali v ločnih sekundah, saj so opazovanja sami koti:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 1,6671 \times 10^{-8} \\
 \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 26,6''
 \end{aligned} \tag{1-140}$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, saj referenčne variance a-priori σ_0^2 ne poznamo. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T , korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = 6,30 \text{ mm} \quad \sigma_{x_T} = 8,20 \text{ mm} \quad \rho_{y_T x_T} = 0,29 \quad (1-141)$$

Izračunajmo še parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T :

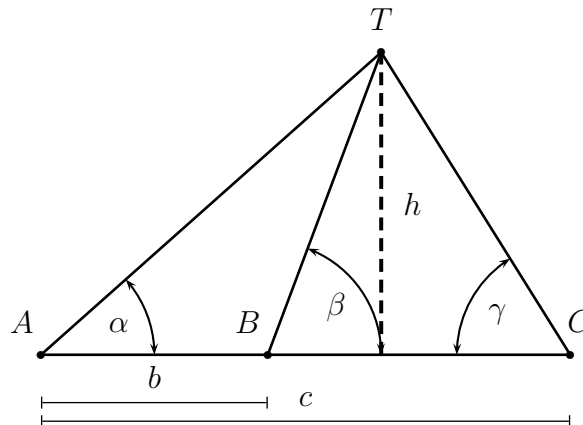
$$a = 21,04 \text{ mm} \quad b = 14,05 \text{ mm} \quad \theta = 66,21^\circ \quad (1-142)$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
α	$-20,5''$	$20,5''$	$37^\circ 38' 39,5''$	$17,0''$
β	$14,7''$	$14,7''$	$64^\circ 57' 14,7''$	$22,2''$
γ	$8,6''$	$8,6''$	$45^\circ 28' 8,6''$	$25,2''$

1.14 Primer 9 – višina točke – opazovani koti

V ravnini imamo tri točke, ki ležijo na premici, in sicer A , B in C . Točka B je od točke A oddaljena za $b = 40,0$ m, točka C pa za $c = 110,0$ m. Določiti želimo višino točke T (oddaljenost od premice), zato smo izmerili tri višinske kote, na točki A kot $\alpha = 37^\circ 39'$, na točki B kot $\beta = 64^\circ 57'$ in na točki C kot $\gamma = 45^\circ 28'$, kot to prikazuje slika 1–12. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnajte opazovanja, izračunajte višino h točke T in njeno natančnost σ_h .



Slika 1–12: Opazovani višinski koti za določitev višine nove točke

Da rešimo nalogo, si bomo pomagali z nalogo poglavja 1.13, saj imamo zelo podobno nalogo. Tam smo iskali koordinati y_T in x_T , tu pa iščemo samo višino h , ki pa je po geometriji identična koordinati x_T .

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Da bi določili višino h smo izmerili $n = 3$ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 = 2$ opazovanj, zato imamo $r = 1$ nadštevilnih opazovanj. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriki $\mathbf{Q}$ ter $\mathbf{P}$, pri tem, da so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1-143)$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

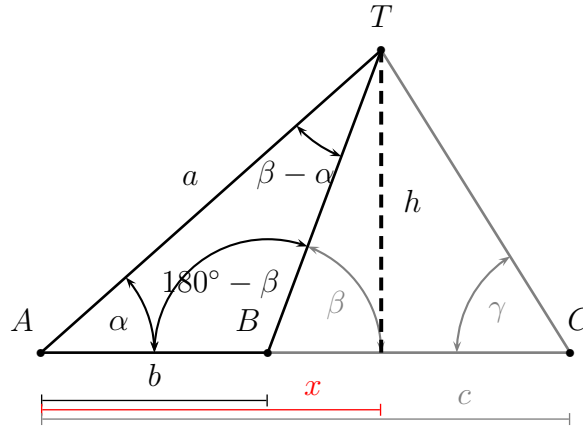
Izbrali si bomo eno samo neznanko in to naj bo iskana višina h . Na ta način je $u = 1$ in je vektor $\mathbf{x}$ enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h \end{bmatrix} \quad (1-144)$$

Pri izračunu približne vrednosti neznanke si tudi tu pomagamo z zunanjim urezom, uporabili pa bomo količine s slike 1–13.

V prvem koraku izračunamo kot na točki T , ki je enak $\beta - \alpha$, nato pa s sinusnim izrekom izračunamo stranico a , pri tem, da izhajamo iz znane dolžine d_{AB} . Dobimo:

$$a = b \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = 79,009 \text{ m} \quad (1-145)$$



Slika 1–13: Določitev približne višine na osnovi enačb zunanjega ureza

Za izračun približne vrednosti neznank merjen kot α in dolžino a iz enačbe (1–145):

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48,262 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-146)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 1$ in $u = 1$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 1 + 1 = 2$. Tudi tu bomo izhajali iz pravokotnih trikotnikov, ki jih tvori točka T s točkami i ($i = \{A, B, C\}$), pri tem, da si bomo pomagali s stranico x , kot je prikazana na sliki 1–13. Iz slike vidimo, da velja:

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} &= \cot \alpha \quad \rightarrow \quad x = h \cot \alpha \\ \frac{x-b}{h} &= \cot \beta \quad \rightarrow \quad x = h \cot \beta + b \\ \frac{c-x}{h} &= \cot \gamma \quad \rightarrow \quad x = c - h \cot \gamma \end{aligned} \quad (1-147)$$

Ker imamo samo eno neznanko, to je višina h , moramo iz enačb (1–147) izločiti količino x . To storimo tako, da desno stran prve enačbe vstavimo namesto x v drugi in tretji enačbi. Ko dobljeni dve enačbi preuredimo, dobimo

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv h(\cot \hat{\alpha} - \cot \hat{\beta}) - b = 0 \\ F_2 &\equiv h(\cot \hat{\alpha} + \cot \hat{\gamma}) - c = 0 \end{aligned} \quad (1-148)$$

Enačbi (1–148) sta dve, kot je tudi število enačb, ki jih moramo sestaviti. Po drugi strani, v obeh enačbah nastopajo vsa tri opazovanja in neznanka. Enačbi sta torej pravilno sestavljeni in jih lahko uporabimo pri splošnem modelu izravnave.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Enačbi (1–148) lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1–148) po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–143).

Dobimo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{h}{\sin^2 \alpha} & \frac{h}{\sin^2 \beta} & 0 \\ -\frac{h}{\sin^2 \alpha} & 0 & \frac{h}{\sin^2 \gamma} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -129,3460 & 58,8038 & 0,0000 \\ -129,3460 & 0,0000 & -94,9763 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1-149}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz (1-148) po višini h :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial h} \\ \frac{\partial F_2}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cot \alpha - \cot \beta \\ \cot \alpha + \cot \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,829 \\ 2,280 \end{bmatrix} \tag{1-150}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah (1-148) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0,0000 \text{ m} \\ -0,0380 \text{ m} \end{bmatrix} \tag{1-151}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev Δ , $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le vektor Δ in izravnano višino h :

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0,0206 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} 48,2411 \text{ m} \end{bmatrix} \tag{1-152}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, kjer bomo referenčni standardni odklon $\hat{\sigma}_0$ zapisali v ločnih sekundah, saj so opazovanja sami koti:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 1,6668 \times 10^{-8} \\
 \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 26,6''
 \end{aligned} \tag{1-153}$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, Σ_{vv} in $\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 . Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
α	$-20,5''$	$20,5''$	$37^\circ 38' 39,5''$	$17,0''$
β	$14,6''$	$14,6''$	$64^\circ 57' 14,6''$	$22,2''$
γ	$8,6''$	$8,6''$	$45^\circ 28' 8,6''$	$25,2''$

parametre elips pogreškov.

Za izračun natančnosti σ_h višine h korenimo kovariančno matriko $\Sigma_{\Delta\Delta}$ in dobimo:

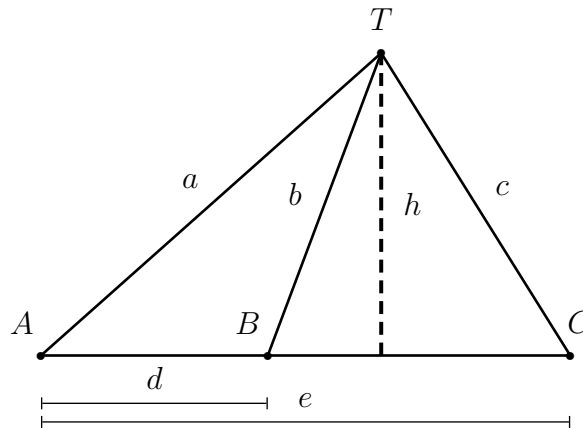
$$\sigma_h = 8,21 \text{ mm} \quad (1-154)$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Primerjajmo rezultate te naloge z rezultati iz poglavja 1.13. Ugotovimo lahko, da dobimo povsem enake rezultat, če tu označimo višino h s koordinato y_T . Vzrok je v tem, da imamo popolnoma enak matematični model, le da smo tu namesto dveh neznank (h in x) v matematični model uvedli le eno (h).

1.15 Primer 10 – višina točke – opazovane dolžine

V ravnini imamo tri točke, ki ležijo na premici, in sicer A , B in C . Točka B je od točke A oddaljena za $d = 40,0$ m, točka C pa za $e = 110,0$ m. Določiti želimo višino točke T (oddaljenost od premice), zato smo izmerili tri dolžine, na točki A dolžino $a = 79,0$ m, na točki B dolžino $b = 53,2$ m in na točki C dolžino $c = 67,7$ m, kot to prikazuje slika 1–14. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnajte opazovanja, izračunajte višino h točke T in njeno natančnost σ_h .



Slika 1–14: Opazovane dolžine za določitev višine nove točke

Pri tej nalogi imamo enak problem kot pri nalogi iz poglavja 1.14, le da tu opazujemo dolžine. Če smo pri opazovanih kotih izhajali iz zunanjskega ureza, bomo tu seveda izhajali iz ločnega preseka. Pri nalogi bomo podali samo nastavitve in končne rezultate, vse vmesne rezultate si izračunajte sami.

Iz naloge je razvidno, da imamo $n = 3$ opazovanj, pri tem, da bi jih nujno potrebovali $n_0 = 2$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriki $\mathbf{Q}$ ter $\mathbf{P}$, pri tem, da so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (1-155)$$

Tudi tu si izberemo eno neznanko, višino h , torej $u = 1$ in vektor $\mathbf{x}$ je enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h \end{bmatrix} \quad (1-156)$$

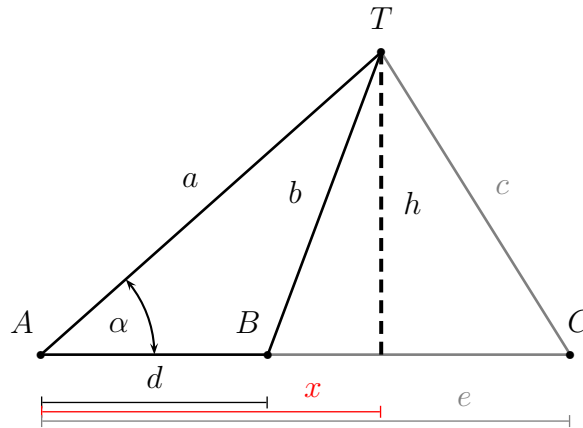
Kako izračunati približno vrednost h_0 ? Uporabimo ločni presek iz količin s slike 1–15.

V trikotniku $\triangle ABT$, kjer imamo dve merjeni (a in b) in eno dano (d) stranico, na osnovi kosinusnega izreka izračunamo kot α . Dobimo:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}\right) \quad (1-157)$$

Za izračun približne višine h_0 uporabimo stranico a in kot α in dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1-158)$$



Slika 1–15: Določitev približne višine na osnovi enačb ločnega preseka

Sestaviti moramo $c = r + u = 1 + 1 = 2$ enačb, kjer si spet pomagamo s stranico x s slike 1–15. S slike lahko vidimo, da velja:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{a^2 - h^2} \\ b^2 &= (x - d)^2 + h^2 \\ c^2 &= (e - x)^2 + h^2 \end{aligned} \quad (1-159)$$

Tudi tu moramo iz treh enačb v 1–159 eliminirati stranico x , saj ni neznanka v modelu. Desno stran prve enačbe vstavimo v drugo in tretjo enačbo. Če ti dve enačbi preuredimo, dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + d^2 - \hat{b}^2 - 2d\sqrt{\hat{a}^2 - h^2} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + e^2 - \hat{c}^2 - 2e\sqrt{\hat{a}^2 - h^2} = 0 \end{aligned} \quad (1-160)$$

Enačbi 1–160 sta dve, kot je tudi število enačb, ki jih moramo sestaviti. Po drugi strani, v obeh enačbah nastopajo vsa tri opazovanja in neznanka. Enačbi sta torej pravilno sestavljeni in jih lahko uporabimo pri splošnem modelu izravnave.

Izvedemo celoten izračun s splošnim modelom izravnave in dobimo:

$$h = 48,2 \text{ m} \quad \sigma_h = 11,4 \text{ mm} \quad (1-161)$$

Natančnost σ_h iz enačbe 1–161 je izračunana na osnovi referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, ki je:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 2,1 \times 10^{-4} \quad \hat{\sigma}_0 = 14,4 \text{ mm} \quad (1-162)$$

Popravki opazovanj, izravnana opazovanja in njihove natančnosti pa so prikazani spodaj.

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
a	$-9,4 \text{ mm}$	$9,4 \text{ mm}$	$79,0 \text{ m}$	$10,9 \text{ mm}$
b	$9,9 \text{ mm}$	$9,9 \text{ mm}$	$53,3 \text{ m}$	$10,4 \text{ mm}$
c	$-4,6 \text{ mm}$	$4,6 \text{ mm}$	$67,7 \text{ m}$	$13,4 \text{ mm}$

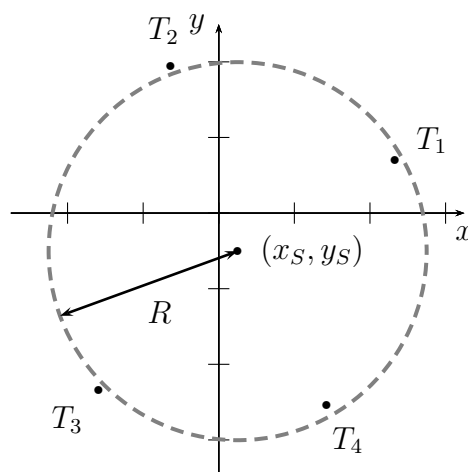
1.16 Primer 11 – točke na krožnici

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x , kot tudi koordinate y , vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1–2.

Preglednica 1–2: Opazovane vse koordinate štirih točk na krožnici

Točka	x [m]	y [m]
T_1	10,16	2,50
T_2	−0,23	7,34
T_3	−5,57	−9,57
T_4	6,50	−11,16

Točke v ravnini prikazuje slika 1–16. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in določi krožnico, ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj središče krožnice x_S in y_S , njen polmer R , natančnosti vseh neznank in parametre absolutne standardne elipse pogreškov središča krožnice.



Slika 1–16: Opazovane točke na krožnici v ravnini

Pri izračunu obravnavane naloge bomo imeli dva poudarka, in sicer pri nastavitvi minimalnega števila opazovanj za rešitev problema in pri izračunu približnih vrednosti neznank. Ker skušamo določiti krožnico, ki se optimalno prilega točkam, vidimo, da imamo enak problem kot pri primeru premice (glej poglavje 1.8) in parabole (glej poglavje 1.10), tudi tu poskušamo na osnovi niza točk v ravnini izračunati krivuljo, ki se optimalno prilega točkam.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz podatkov je razvidno, da je imamo opazovane tako koordinate x kot tudi koordinate y štirih

točk, zato je število opazovanj enako $n = 8$ in vektor opazovanj nastavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,16 \\ 2,50 \\ -0,23 \\ 7,34 \\ -5,57 \\ -9,57 \\ 6,50 \\ -11,16 \end{bmatrix} \quad (1-163)$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato velja $\mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I}$. Določimo sedaj še minimalno število opazovanj za rešitev problema n_0 in število nadštevilnih opazovanj r . Ker morajo točke ležati na krožnici, potem mora za vse točke veljati:

$$(x_i - x_S)^2 + (y_i - y_S)^2 = R^2 \quad (1-164)$$

Iz enačbe (1-164) vidimo, da potrebujemo tri parametre, s katerimi lahko enolično določimo krožnico, in sicer koordinate središča krožnice x_S in y_S in polmer R . To nam pove, da bomo uvedli 3 neznanke. Nato bomo pa razmišljali enako kot pri premici ali paraboli. Če želimo pri posredni izravnavi uporabiti enačbo (1-164) za sestavo enačbe popravkov, moramo ali opazovano koordinato y ali x nadomestiti z novo neznanko. Ker imamo 4 točke, to pomeni dodatne 4 neznanke (glej poglavji 1.8 in 1.10). Iz tega lahko sklepamo, da je $n_0 = 3 + 4 = 7$ in posledično, število nadštevilnih opazovanj je $r = 1$.

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.

Kot smo že zapisali, si izberemo tri neznanke x_S , y_S in R . Vektor $\mathbf{x}$ je enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ R \end{bmatrix} \quad (1-165)$$

Pojavi pa se vprašanje, kako izračunati približne vrednosti neznank. Seveda bomo izhajali iz enačbe krožnice (1-164), uporabili pa bomo prve tri merjene točke. Zapisali bomo:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_S)^2 + (y_1 - y_S)^2 &= R^2 \\ (x_2 - x_S)^2 + (y_2 - y_S)^2 &= R^2 \\ (x_3 - x_S)^2 + (y_3 - y_S)^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (1-166)$$

Odstranimo polmer R iz enačb (1-166), tako da naredimo razliki: 2. - 1. enačba in 3. - 1. enačba. Dobimo:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_S)^2 - (x_1 - x_S)^2 + (y_2 - y_S)^2 - (y_1 - y_S)^2 &= 0 \\ (x_3 - x_S)^2 - (x_1 - x_S)^2 + (y_3 - y_S)^2 - (y_1 - y_S)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1-167)$$

Kvadrirajmo vse elemente v enačbah (1-167) in če ustrezno preuredimo enačbi, bomo dobili:

$$\begin{aligned} 2x_S(x_2 - x_1) + 2y_S(y_2 - y_1) &= x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ 2x_S(x_3 - x_1) + 2y_S(y_3 - y_1) &= x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \end{aligned} \quad (1-168)$$

Vidimo, da v enačbah (1-168) ne nastopata kvadrata koordinat središča (x_S^2 in y_S^2) in da dobimo dve linearni enačbi z dvema neznankama. Rešitev enostavno dobimo tako, da enačbi zapišemo v matrični obliki in rešimo kvadratni sistem. Približni vrednosti koordinat središča krožnice sta:

$$x_{S,0} = 1,506 \text{ m} \quad y_{S,0} = -2,506 \text{ m} \quad (1-169)$$

Polmer R izračunamo tako, da uporabimo koordinate točke T_1 in koordinate središča krožnice iz enačbe (1-169). Dobimo:

$$R_0 = \sqrt{(x_1 - x_{S,0})^2 + (y_1 - y_{S,0})^2} = 9,998 \text{ m} \quad (1-170)$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.

Ker imamo $r = 1$ in $u = 3$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = 1 + 3 = 4$. Tudi tu za vsako točko sestavimo eno enačbo, uporabimo pa enačbo krožnice iz enačbe (1-164). Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv (\hat{x}_1 - x_S)^2 + (\hat{y}_1 - y_S)^2 - R^2 \\ F_2 &\equiv (\hat{x}_2 - x_S)^2 + (\hat{y}_2 - y_S)^2 - R^2 \\ F_3 &\equiv (\hat{x}_3 - x_S)^2 + (\hat{y}_3 - y_S)^2 - R^2 \\ F_4 &\equiv (\hat{x}_4 - x_S)^2 + (\hat{y}_4 - y_S)^2 - R^2 \end{aligned} \quad (1-171)$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$.

Matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = 4 \times 8$ in predstavlja parcialne odvode enačb (1-171) po opazovanjih (iz enačbe (1-163)). Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times u = 4 \times 3$ in predstavlja parcialne odvode enačb (1-171) po neznankah (iz enačbe (1-165)). Vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = 4 \times 1$.

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

Prikažimo v tem delu le vektor $\mathbf{\Delta}$, popravke opazovanj in izravnana opazovanja pa na koncu, skupaj z natančnostmi. Za rešitev neznank dobimo:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,0023 \text{ m} \\ 0,0025 \text{ m} \\ -0,0013 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 1,5034 \text{ m} \\ -2,5037 \text{ m} \\ 9,9968 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-172)$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčnega standardnega odklona $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 1,2147 \times 10^{-5} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 3,49 \text{ mm} \end{aligned} \quad (1-173)$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.

Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, saj nimamo podanih natančnosti opazovanj. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

Da dobimo natančnosti koordinat središča krožnice σ_{x_S} in σ_{y_S} in polmera σ_R , korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\Sigma_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{x_S y_S}$ pa dobimo iz prvega izven-diagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{x_S} = 2,92 \text{ mm} \quad \sigma_{y_S} = 2,25 \text{ mm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0,18 \quad \sigma_R = 1,78 \text{ mm} \quad (1-174)$$

Izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na središča krožnice:

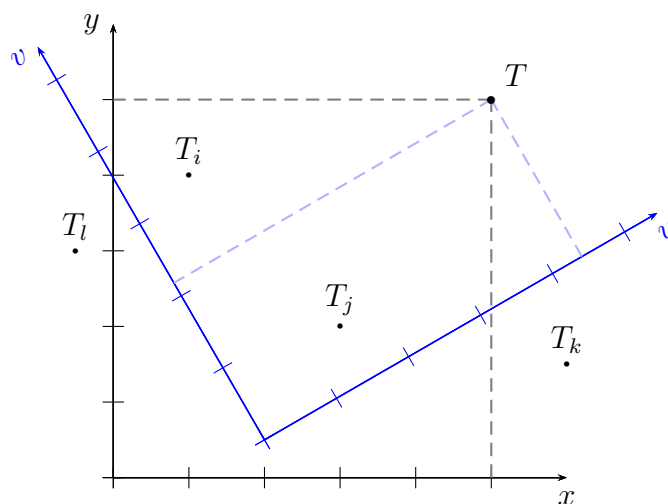
$$a = 2,98 \text{ mm} \quad b = 2,17 \text{ mm} \quad \theta = -17,16 \text{ degree} \quad (1-175)$$

Popravki opazovanj, izravnana opazovanja in njihove natančnosti pa so prikazani spodaj.

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
x_1	-1,71 mm	1,71 mm	10,1583 m	3,04 mm
y_1	-0,99 mm	0,99 mm	2,4990 m	3,34 mm
x_2	-0,28 mm	0,28 mm	-0,2303 m	3,47 mm
y_2	1,56 mm	1,56 mm	7,3416 m	3,11 mm
x_3	1,05 mm	1,05 mm	-5,5689 m	3,32 mm
y_3	1,05 mm	1,05 mm	-9,5690 m	3,32 mm
x_4	0,94 mm	0,94 mm	6,5009 m	3,36 mm
y_4	-1,62 mm	1,62 mm	-11,1616 m	3,08 mm

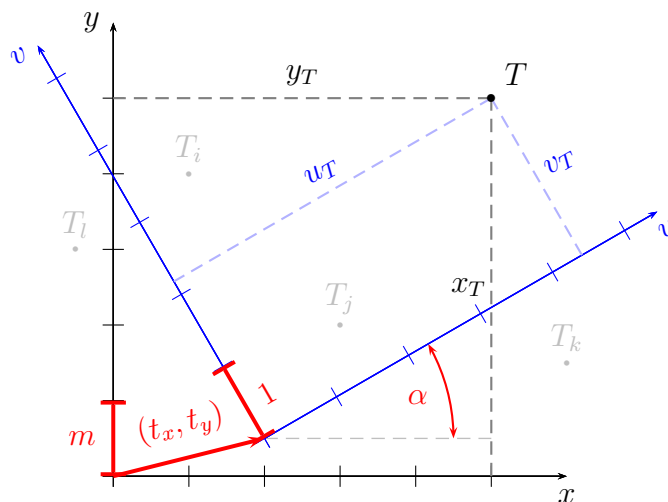
1.17 Ravninska podobnostna transformacija

V ravnini imamo k točk, ki imajo opazovane koordinate v dveh koordinatnih sistemih. Prvi koordinatni sistem ima oznaki u in v , drugi pa x in y . Opazovanja so koordinate vseh točk v obeh sistemih, torej koordinate u , v , x in y . Geometrijo problema prikazuje slika 1–17. S splošnim modelom izravnave izravnajte po MNK izravnajte opazovanja (koordinate točk v obeh sistemih) in izračunajte transformacijske parametre iz sistema uv v sistem xy . Izračunajte tudi natančnosti transformacijskih parametrov.



Slika 1–17: Prikaz opazovanih koordinat točk v obeh koordinatnih sistemih

Pri obravnavi podobnostne transformacije obravnavamo problem, ko imamo podane koordinate (fizično) istih točk v dveh koordinatnih sistemih, a same povezave med dvema koordinatnima sistemoma ne poznamo. To pomeni da, če imamo podane koordinate ene točke samo v npr. sistemu uv , ne vemo nič, kakšne so koordinate te točke v sistemu xy . Cilj je, da na osnovi koordinat točk v obeh sistemih določimo povezavo med obema sistemoma. Kot prvo moramo ugotoviti, kateri in kakšni so parametri, ki povezujejo dva koordinatna sistema. Sliko geometrije povezave med dvema koordinatnima sistemoma v ravnini prikazuje slika 1–18.



Slika 1–18: Prikaz transformacijskih parametrov med dvema koordinatnima sistemoma

Slika 1–18 prikazuje niz geodetskih točk, ki jim položaje lahko opišemo tako v koordinatnem sistemu uv kot tudi v sistemu xy . Koordinati u_T in v_T točke T prikazujeta položaja točke T v sistemu uv (modra barva), medtem ko koordinati x_T in y_T pa opisujeta položaj točke T v sistemu xy (črna barva). Enako seveda velja za vse ostale točke (T_i , T_j , T_k in T_l), ki so podane v obeh sistemih. Postavi pa se vprašanje, kako lahko opišemo relacijo koordinatnega sistema uv glede na sistem xy . Te parametre, rečemo jim transformacijski parametri, predstavlja slika 1–18 v rdeči barvi. Ugotovimo lahko, da koordinatni sistem uv lahko glede na koordinatni sistem xy :

- **premaknemo**, kar opišemo z dvema parametroma premika t_x in t_y in predstavljata vektor premika izhodišča obeh sistemov,
- **zasukamo**, kar opišemo z enim parametrom zasuka α , ki predstavlja kot zasuka okoli osi z (ali w) in
- **spremenimo velikost**, kar opišemo z enim parametrom merila m , ki predstavlja razmerje med enotama v obeh sistemih.

Vidimo, da transformacijo med dvema koordinatnima sistemoma v ravnini lahko opišemo s štirimi parametri. Ob tem predpostavimo, da sta geometriji geodetske mreže v obeh sistemih podobne¹, zato tako transformacijo imenujemo **podobnostna** transformacija.

1.17.1 Enačba podobnostne transformacije v ravnini

Transformacijo iz sistema uv v sistem xy izvedemo s tremi koraki:

1. Izvedemo zasuk sistema za kot α . S tem naredimo, da so koordinatne osi obeh sistemov vzporedne.
2. Spremenimo merilo s parametrom merila m . S tem naredimo, da imamo enako enoto merila v obeh sistemih.
3. Premaknemo izhodišče koordinatnega sistema uv v središče koordinatnega sistema xy s parametroma premika t_x in t_y .

Vse tri korake zapišemo v enačbi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (1-176)$$

Enačba (1–176) je podana v vektorski obliki, a dejansko predstavlja dve enačbi, za vsako koordinatno komponento x in y po eno enačbo, ki ju lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned} x &= t_x + m \cos(\alpha)u + m \sin(\alpha)v \\ y &= t_y - m \sin(\alpha)u + m \cos(\alpha)v \end{aligned} \quad (1-177)$$

Vidimo, da lahko enačbo 4-parametrične transformacije iz enačbe (1–176) ali iz enačb (1–177) zapišemo za vsako točko posebej. V enačbah tako nastopajo vsi štirje transformacijski parametri (t_x , t_y , α in m), koordinati u in v (1. sistem) ter koordinati x in y (2. sistem).

¹mrežo lahko premaknemo, zasukamo in povečamo/zmanjšamo, a oblika mora ostati enaka

1.17.2 Določitev osnovnih parametrov izravnave

Ker imamo podanih k točk v ravnini, pomeni, da imamo $n = k \cdot 2 \cdot 2$ opazovanj. Vsaka točka ima **dve** koordinati, koordinate pa imamo podane v **dveh** koordinatnih sistemih. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ zato zapišemo kot

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & x_1 & y_1 & u_2 & v_2 & x_2 & y_2 & \cdots & u_k & v_k & x_k & y_k \end{bmatrix}^T \quad (1-178)$$

Vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ pripada še kovariančna matrika opazovanj Σ , matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$, vse velikosti $n \times n$.

Kako pa spet določiti minimalno število opazovanj za rešitev problema n_0 ? Tu bomo razmišljali enako kot pri premici (poglavje 1.8), paraboli (poglavje 1.10) in krožnici (poglavje 1.16). Če bi enačbi (1-177) uporabili za sestavo enačb popravkov posredne izravnave, bi ugotovili, da:

- bomo uvedli 4 neznanke, to so transformacijski parametri, in da
- opazovani koordinati x in y lahko uporabimo, medtem ko opazovanih koordinat u in v ne (vsaka enačba popravkov ima lahko ne **eno** opazovanje).

Zato moramo za vsako točko uvesti nov par neznank, in sicer p , ki se navezuje na koordinato u , in q , ki pa se navezuje na koordinato v . Pri k -tih točkah to pomeni:

$$n_0 = u = \underbrace{4}_{t_x, t_y, \alpha, m} + \underbrace{2k}_{p_1, q_1, \dots, p_k, q_k} = 4 + 2k \quad (1-179)$$

Iz enačbe (1-179) vidimo, da je minimalno število opazovanj n_0 odvisno od števila točk, ki so podane v obeh sistemih. Za različno število podanih točk so vsa tri števila n , n_0 in r podana v preglednici 1-3. V preglednici nastopajo tri situacije, kjer je prva predstavljena v rdeči barvi v prvi vrstici. Če imamo eno samo točko podano v dveh sistemih, nimamo dovolj informacij za izračun transformacijskih parametrov ($n < n_0$, $r < 0$). V drugem primeru, ko imamo podani dve točki (modra barva), imamo določen problem, kar pomeni, da lahko transformacijske parametre izračunamo enolično ($n = n_0$, $r = 0$). Šele, ko imamo tri točke ali več, imamo predoločen sistem ($n > n_0$, $r > 0$), kar pomeni, da je optimalna rešitev dana preko metode najmanjših kvadratov.

k	n	n_0	r
1	4	4+2= 6	-2
2	8	4+4= 8	0
3	12	4+6=10	2
4	16	4+8=12	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$4k$	$4 + 2k$	$2k - 4$

Preglednica 1–3: Določitev osnovnih parametrov izravnave v odvisnosti od števila podanih točk v obeh sistemih

1.17.3 Uvedba neznank pri splošnem modelu izravnave

V prejšnjem poglavju smo videli, da bi morali pri posredni izravnavi uvesti kar $u = n_0$ neznank, kar prikazuje enačba (1–179). Ker pa bomo uporabili splošni model izravnave, lahko število neznank uvedemo drugače. Tu bomo izbrali le $u = 4$, za neznanke bomo določili le parametre transformacije. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je zato enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \alpha \\ m \end{bmatrix} \quad (1-180)$$

1.17.4 Sestava enačb splošnega modela izravnave

Ker imamo število neznank enako $u = 4$ in število nadštevilnih opazovanj enako $r = 2k - 4$, moramo sestaviti $c = r + u = 4 + 2k - 4 = 2k$ enačb. Sestaviti moramo dvakrat toliko enačb, kot imamo točk, ali povedano drugače, za vsako točko moramo sestaviti dve enačbi. Uporabimo seveda enačbi (1–177), ki ju za i -to točko preoblikujemo v:

$$\begin{aligned} F_{i,x} &\equiv \hat{x}_i - t_x - m \cos(\alpha) \hat{u}_i - m \sin(\alpha) \hat{v}_i \\ F_{i,y} &\equiv \hat{y}_i - t_y + m \sin(\alpha) \hat{u}_i - m \cos(\alpha) \hat{v}_i \end{aligned} \quad (1-181)$$

Na osnovi sestavljenih $c = 2k$ enačb v obliki, kot je prikazana v enačbi (1–181), sestavimo osnovni matrični model splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}$. Velikosti matrik $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektorja $\mathbf{f}$ so sledeče:

1. matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = 2k \times 4k$,
2. matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times 4 = 2k \times 4$ in
3. vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = 2k \times 1$

Pri sestavi matrike $\mathbf{A}$ odvajamo vse enačbe po vseh opazovanjih. Iz oblike sestavljenih enačb iz enačbe (1–181) pa vidimo, da enačbi za i -to točko vsebujeta le opazovanja i -te točke, torej u_i, v_i, x_i

in y_i . Parcialni odvodi enačb (1–181) po vseh štirih koordinatah so sledeči:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,x}}{\partial u_i} &= -m \cos(\alpha) & \frac{\partial F_{i,x}}{\partial v_i} &= -m \sin(\alpha) & \frac{\partial F_{i,x}}{\partial x_i} &= 1 & \frac{\partial F_{i,x}}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{\partial F_{i,y}}{\partial u_i} &= m \sin(\alpha) & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial v_i} &= -m \cos(\alpha) & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial x_i} &= 0 & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial y_i} &= 1 \end{aligned} \quad (1-182)$$

Matrika $\mathbf{A}$ je velika matrika, ki pa ima veliko praznih elementov in bo na koncu enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -m \cos(\alpha) & -m \sin(\alpha) & 1 & 0 \\ m \sin(\alpha) & -m \cos(\alpha) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-183)$$

Matrike $\mathbf{A}_1$ do $\mathbf{A}_k$ so vse velikosti 2×4 in vsebujejo parcialne odvode iz enačbe (1–182).

Ko sestavljamo matriko $\mathbf{B}$, pa moramo za vsako točko odvajati enačbi (1–181) po vseh štirih neznankah iz enačbe (1–180), kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,x}}{\partial t_x} &= -1 & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial t_x} &= 0 \\ \frac{\partial F_{i,x}}{\partial t_y} &= 0 & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial t_y} &= -1 \\ \frac{\partial F_{i,x}}{\partial \alpha} &= m \sin(\alpha) u_i - m \cos(\alpha) v_i & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial \alpha} &= m \cos(\alpha) u_i + m \sin(\alpha) v_i \\ \frac{\partial F_{i,x}}{\partial m} &= -\cos(\alpha) u_i - \sin(\alpha) v_i & \frac{\partial F_{i,y}}{\partial m} &= \sin(\alpha) u_i - \cos(\alpha) v_i \end{aligned} \quad (1-184)$$

Matrika $\mathbf{B}$ ima na koncu obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & m \sin(\alpha) u_i - m \cos(\alpha) v_i & -\cos(\alpha) u_i - \sin(\alpha) v_i \\ 0 & -1 & m \cos(\alpha) u_i + m \sin(\alpha) v_i & \sin(\alpha) u_i - \cos(\alpha) v_i \end{bmatrix} \quad (1-185)$$

Na koncu sestavimo še vektor odstopanj $\mathbf{f}$, ki ima na koncu obliko:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} t_x + m \cos(\alpha) u_i + m \sin(\alpha) v_i - x_i \\ t_y - m \sin(\alpha) u_i + m \cos(\alpha) v_i - y_i \end{bmatrix} \quad (1-186)$$

1.17.5 Rešitev splošnega modela izravnave pri ravninski podobnostni transformaciji

Elemente matrik $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektorja $\mathbf{f}$ izračunamo na osnovi približnih vrednosti neznank in merjenih vrednosti opazovanj. Če ne pričakujemo velike vrednosti zasuka (več kot 90°), potem lahko za približne vrednosti neznank nastavimo kar $t_{x,0} = t_{y,0} = \alpha_0 = 0$ in $m_0 = 1$ (pazi: približna vrednost

merila ni enaka 0). V nasprotnem primeru je potrebno iz merjenih koordinat izračunati približne vrednosti vseh štirih transformacijskih parametrov.

Ker imamo v splošnem slabe približne vrednosti transformacijskih parametrov, moramo rešitev splošnega modela izvesti v več iteracijah.