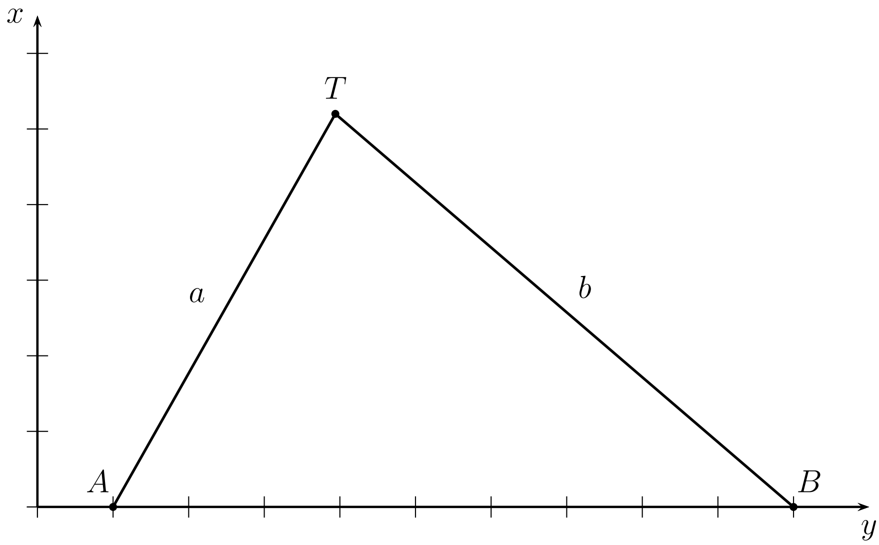
Elipse pogreškov – Ločni presek

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dve stranici, in sicer $a = 60.0\,\mathrm{m}$ in $b = 80.0\,\mathrm{m}$, obe z natančnostjo ($\sigma_a = \sigma_b = 1.0\,\mathrm{cm}$), kot to prikazuje slika 1. Izračunajte koordinate točke T, kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_T$ položaja točke T, natančnosti obeh koordinat σ_{y_T}, σ_{x_T} in njuno korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Izračunajte parametre absolutne elipse pogreškov a, b in θ na točki T in jo tudi izrišite.



Slika 1: Opazovanja ločnega preseka za določitev koordinat točke T

Za izračun kovariančne matrike točke T na osnovi ločnega preseka, je prvo potrebno izračunati koordinate točke T in s prenosom varianc in kovarianc izračunati še kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{yy}$. V postopku bomo podajali le minimalno število vmesnih rezultatov z enačbami, za podroben postopek glejte predmet *Geodezija* iz prvega letnika.

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$.
   Število opazovanj je $n =$ ___ in vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad}\mathrm{m} \\ \underline{\qquad}\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{xx} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \tag{2}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j $(j = 1, \ldots, m)$ in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Zanimajo nas koordinate točke T, torej je $n =$ ___, vektor neznank $\mathbf{y}$ pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.

   Rešitev koordinat poteka po naslednjih korakih:

   - izračun dane dolžine D med točkama A in B:

   $$D = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \underline{\quad}\,\mathrm{m} \tag{4}$$

   - izračun kota α na točki A po kosinusnem izreku:

   $$\alpha = \arccos\frac{a^2 + D^2 - b^2}{2aD} = \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}'\underline{\quad}'' \tag{5}$$

   Sledi izračun koordinat točke T:

   $$\begin{aligned} y_T &= y_A + a\cos\alpha = \underline{\quad}\,\mathrm{m} \\ x_T &= x_A + a\sin\alpha = \underline{\quad}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{6}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Za izračun parcialnih odvodov bomo uporabili verižno pravilo. Izračunati moramo parcialne odvode koordinat y_T in x_T po obeh opazovanjih a in b, izhajamo pa iz enačbe 6. Vidimo pa, da je kot α iz enačbe 5 odvisen tako od a kot tudi od b. Zato prvo izračunamo odvode α iz enačbe 5 po a in po b:

   $$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial a} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\frac{2a(2aD) - (a^2 + D^2 - b^2)2D}{(2aD)^2} = \underline{\quad} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial b} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\frac{-b}{(aD)} = \underline{\quad} \end{aligned} \tag{7}$$

   Nato izračunamo končne parcialne odvode:

   $$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial a} &= \cos\alpha - a\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial a} = \underline{\quad} & \frac{\partial y_T}{\partial b} &= -\,a\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial b} = \underline{\quad} \\ \frac{\partial x_T}{\partial a} &= \sin\alpha + a\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial a} = \underline{\quad} & \frac{\partial x_T}{\partial b} &= a\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial b} = \underline{\quad} \end{aligned} \tag{8}$$

   Jakobijeva matrika $\mathbf{J}$ je na koncu enaka:

   $$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{9}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
   Kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{yy}$, ki predstavlja kovariančno matriko točke T, je enaka:

   $$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\mathrm{m}^2 \tag{10}$$

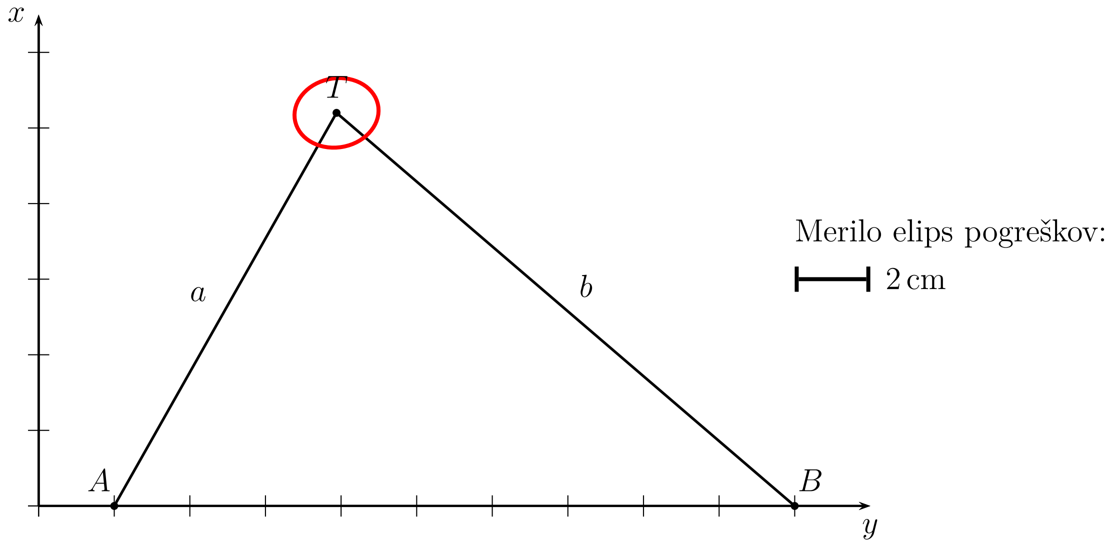
6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
   Prvo izračunamo natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$;

$$\sigma_{y_T} = \_\_\_\_\text{cm} \qquad \sigma_{x_T} = \_\_\_\_\text{cm} \qquad \rho_{y_T x_T} = \_\_\_\_ \tag{11}$$

Po postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na točki T:

$$a = \_\_\_\_\text{cm} \qquad b = \_\_\_\_\text{cm} \qquad \theta = \_\_\_\_^\circ \tag{12}$$

Izrišimo še elipse pogreškov na točki T.

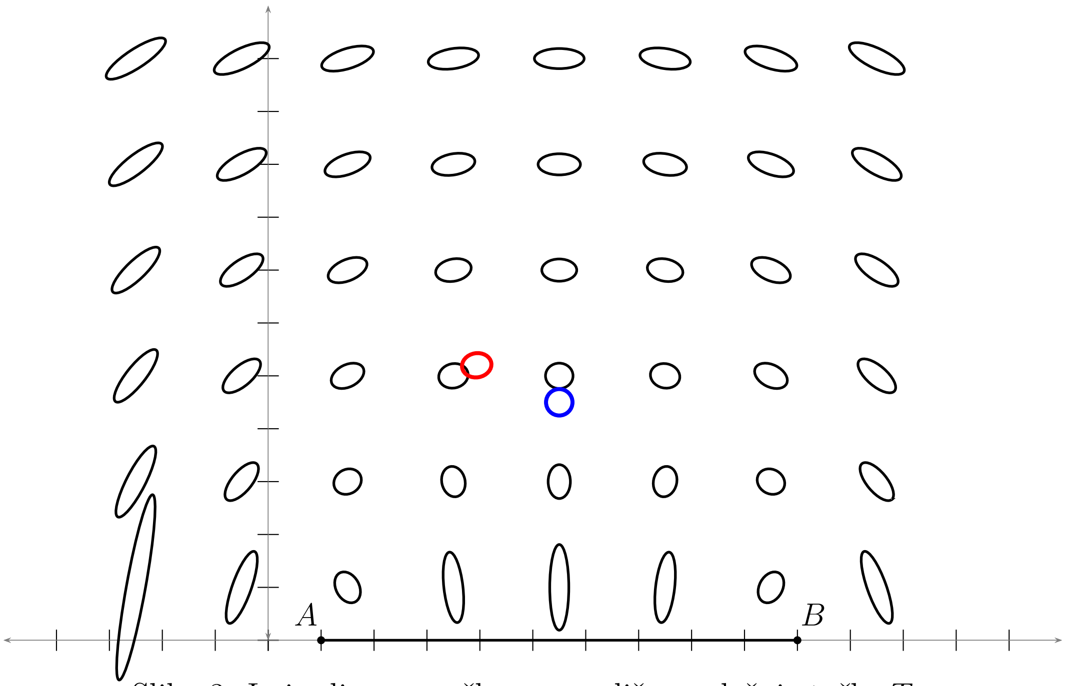


Slika 2: Izris elips pogreškov na točki T

Tako kot pri zunanjem vrezu nas na koncu nas zanima, kakšne so elipse pogreškov v odvisnosti od različnih položajev točke T. To prikazuje slika 3. Na sliki so prikazane:

- elipsa pogreškov točke T iz slike 2 – izrisana z rdečo barvi,
- elipse pogrekov za različne položaje točke T – izrisane s črno barvo in
- elipsa pogreškov položaja točke T, ki je rezultat optimalnega preseka stranic a in b – izrisana z modro barvo.

Tudi pri ločnem preseku lahko vidimo, kako različna geometriji točk A, B in T vpliva na velikost, obliko in orientacijo elips pogreškov. Obstaja samo en položaj, kjer je elipsa krožnica (modra elipsa), ki je se seveda ponovi na drugi strani zveznice AB. Vse ostale elipse so dejansko elipse.



Slika 3: Izris elips pogreškov za različne položaje točke T