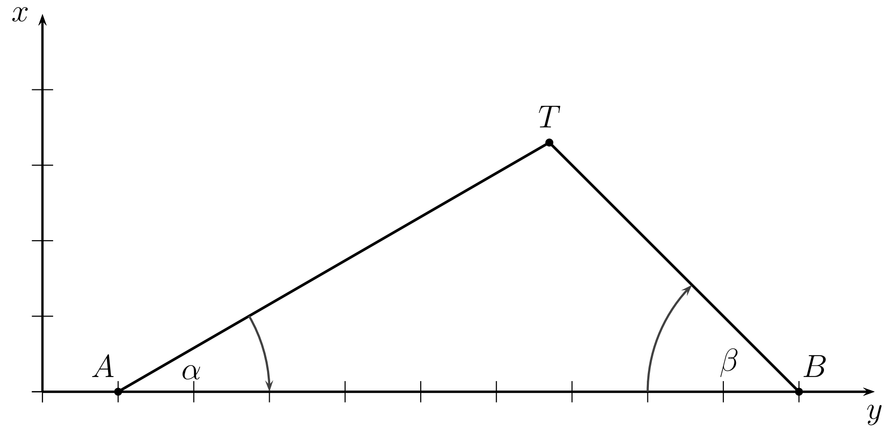
Elipse pogreškov – Zunanji urez

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva kota, in sicer $\alpha = 30°$ in $\beta = 45°$, oba z natančnostjo $(\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1')$, kot to prikazuje slika 1. Izračunajte koordinate točke T, kovariančno matriko $\boldsymbol{\Sigma}_T$ položaja točke T, natančnosti obeh koordinat σ_{y_T}, σ_{x_T} in njuno korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Izračunajte parametre absolutne elipse pogreškov a, b in θ na točki T in jo tudi izrišite.



Slika 1: Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat točke T

Naloga predstavlja enega izmed primerov enolične določitve koordinat točke, to je zunanji urez, in je bila rešena že v datoteki *PrenosVarCovar.pdf*. Tu so zato podani samo rezultati, brez enačb, rešitev pa sledi postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc.

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$.
   Število opazovanj je $n =$ ___ in vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Kovariančna matrika $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ ima obliko:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{xx} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j $(j = 1, \dots, m)$ in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Zanimajo nas koordinate točke T, torej je $n =$ ___, vektor neznank $\mathbf{y}$ pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $(j = 1, \dots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
   Izračun koordinat točke T:

$$\begin{aligned} y_T &= \_\_\_\,\mathrm{m} \\ x_T &= \_\_\_\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Jakobijeva matrika $\mathbf{J}$ je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
   Kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{yy}$, ki predstavlja kovariančno matriko točke T, je enaka:

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \tag{6}$$

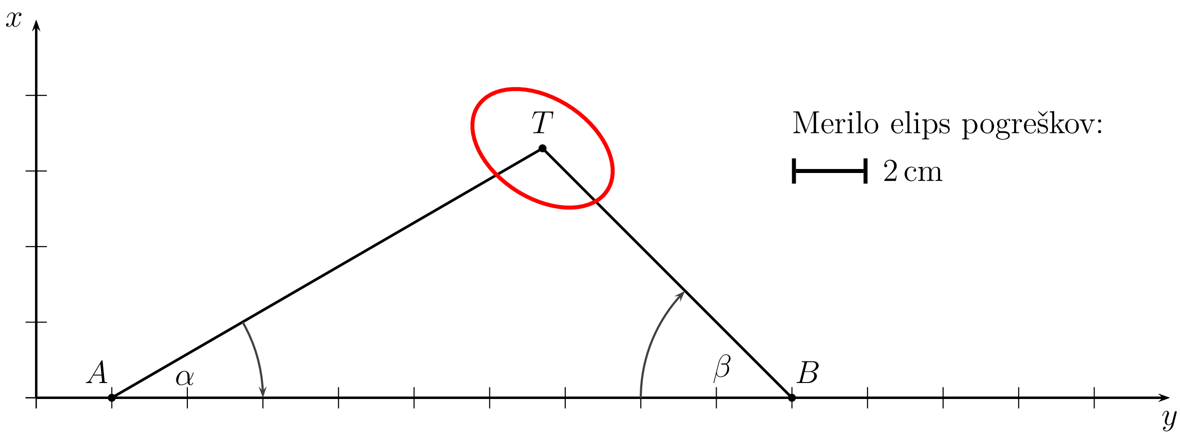
6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
   Prvo izračunamo natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$;

$$\sigma_{y_T} = \_\_\_\mathrm{cm} \qquad \sigma_{x_T} = \_\_\_\mathrm{cm} \qquad \rho_{y_T x_T} = \_\_\_ \tag{7}$$

Po postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na točki T:

$$a = \_\_\_\mathrm{cm} \qquad b = \_\_\_\mathrm{cm} \qquad \theta = \_\_\_^\circ \tag{8}$$

Izrišimo še elipse pogreškov na točki T.

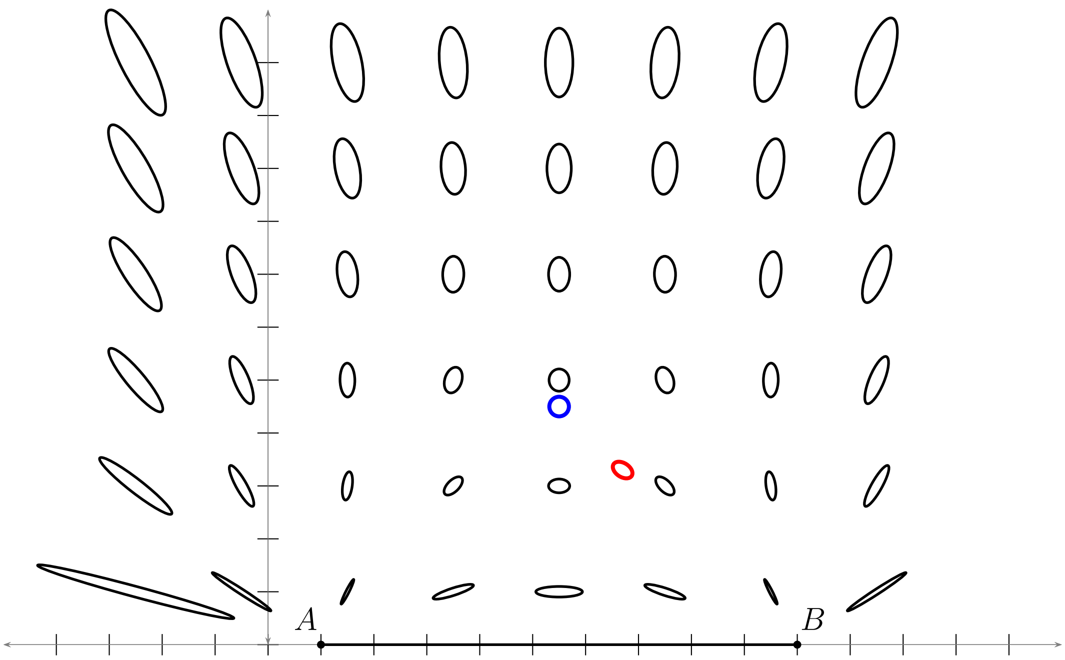


Slika 2: Izris elips pogreškov na točki T

Na koncu pa nas zanima še, kakšne so elipse pogreškov v odvisnosti od različnih položajev točke T. To prikazuje slika 3. Na sliki so prikazane:

- elipsa pogreškov točke T iz slike 2 – izrisana z rdečo barvi,
- elipse pogrekov za različne položaje točke T – izrisane s črno barvo in
- elipsa pogreškov položaja točke T, ki je rezultat optimalnega preseka kotov α in β – izrisana z modro barvo.

Iz slike se lepo vidi, kako se oblikujejo elipse pogreškov, pri različni geometriji točk A, B in T. Elipse pogreškov so zelo različnih velikosti in oblike. Od krožnice (modra elipsa) do zelo sploščenih elips in od malih do zelo velikih. Ugodna situacija je, ko imamo majhne in krožne elipse pogreškov, v tem primeru govorimo o dobrem preseku, ki nam zagotovi homogeno natančnost položaja točke T. Homogena natančnost položaja je dosežena takrat, ko sta obe komponenti primerljive (enake) natančnosti in ko ni korelacije med njima. Takrat bo elipsa pogreškov oblike krožnice. Izraz homogenost se nanaša na to, da je natančnost položaja točke neodvisna od smernega kota. To si lahko predstavljamo tako, da presekamo elipso s premico, ki gre skozi točko T in je usmerjena pod različnimi smernimi koti. Če sta oddaljenosti obeh točk presečišča enako oddaljeni, ne glede na vrednost smernega kota, govorimo o homogeni natančnosti.



Slika 3: Izris elips pogreškov za različne položaje točke T