

Elipse pogreškov – Koordinate točke A in B :

V državnem koordinatnem sistemu imamo podane koordinate dveh točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 10 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (40 \text{ m}, 35 \text{ m})$. Podane imamo pa tudi natančnosti in korelacije koordinat obeh točk, in sicer:

- na točki A : $\sigma_{y_A} = 1.7 \text{ cm}$, $\sigma_{x_A} = 2.1 \text{ cm}$ in $\rho_{y_A x_A} = -0.1$
- na točki B : $\sigma_{y_B} = 2.0 \text{ cm}$, $\sigma_{x_B} = 1.9 \text{ cm}$ in $\rho_{y_B x_B} = 0.1$
- korelacije: $\rho_{y_A y_B} = -0.2$, $\rho_{y_A x_B} = 0.2$, $\rho_{x_A y_B} = -0.1$ in $\rho_{x_A x_B} = -0.1$

Izračunaj:

- kovariančno matriko Σ_{AB} položajev (koordinat) točke A in B ,
- parametre absolutne elipse pogreškov na točki A , in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov,
- parametre absolutne elipse pogreškov na točki B , in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov,
- kovariančno matriko $\Sigma_{\overline{AB}}$ vektorja \overline{AB} in
- parametre relativne elipse pogreškov vektorja \overline{AB} , in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov.

Elipse tudi izrišite.

Podane imamo koordinate dveh točk, A in B , kovariančna matrika Σ_{AB} položajev obeh točk je torej velikosti $_ \times _$ in ima obliko:

$$\Sigma_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_A}^2 & \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{y_A x_B} \\ \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{x_A}^2 & \sigma_{x_A y_B} & \sigma_{x_A x_B} \\ \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{x_A y_B} & \sigma_{y_B}^2 & \sigma_{y_B x_B} \\ \sigma_{y_A x_B} & \sigma_{x_A x_B} & \sigma_{y_B x_B} & \sigma_{x_B}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1)$$

Za izračun polosi standardne elipse pogreškov bomo uporabili sledeči enačbi:

$$\begin{aligned} a = \sqrt{\lambda_1} &\rightarrow \lambda_1 = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \\ b = \sqrt{\lambda_2} &\rightarrow \lambda_2 = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \end{aligned} \quad (2)$$

medtem ko bomo za matematični kot zasuka velike polosi glede na absciso uporabili:

$$\theta = \frac{\text{atan2}(2\sigma_{yx}, \sigma_y^2 - \sigma_x^2)}{2} \quad (3)$$

V enačbah 2 in 3 so parametri σ_y , σ_x in σ_{yx} generični, torej jih bomo v nadaljevanju ustrezno nadomestili.

Za izračun parametrov absolutne elipse pogreškov na točki A iz kovariančne matrike Σ_{AB} v enačbi 1 uporabimo kovariančno matriko Σ_A točke A , ki predstavlja pod-matriko matrike Σ_{AB} , kjer vzamemo le prvi dve vrstici in prva dva stolpca. Uporabimo enačbe 2 in 3 za podatke natančnosti točke A , in dobimo:

- Standardna elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$
- 95% elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$
- 99% elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$

Za izračun parametrov absolutne elipse pogreškov na točki B pa iz matrike Σ_{AB} vzamemo zadnji dve vrstici in zadnja dva stolpca in dobimo:

- Standardna elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$
- 95% elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$
- 99% elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$

Kovariančno matriko $\Sigma_{\overline{AB}}$ vektorja \overline{AB} dobimo lahko po enačbah, ki so prikazane v dokumentu [ElipsePogreskov.pdf](#), tu pa pokažimo zakon o prenosu varianc in kovarianc (dobimo seveda iste rezultate):

$$\Sigma_{\overline{AB}} = \mathbf{J}\Sigma_{AB}\mathbf{J}^T \quad \rightarrow \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

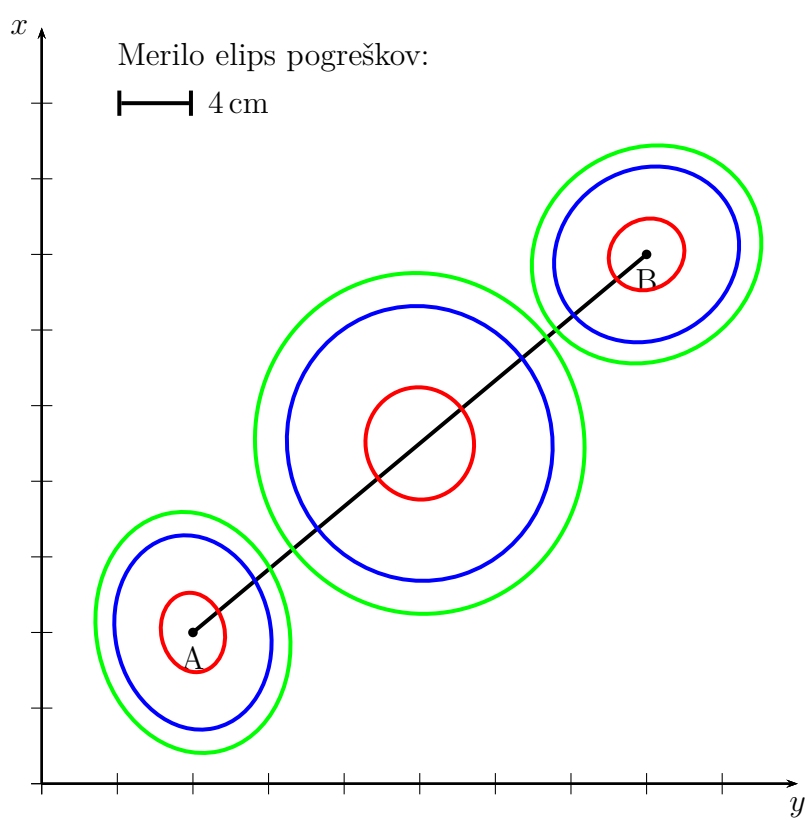
Kovariančna matrika iz enačbe 4 ima vrednosti:

$$\Sigma_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta y}^2 & \sigma_{\Delta y \Delta x} \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} & \sigma_{\Delta x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ______ & ______ \\ ______ & ______ \end{bmatrix} \text{m}^2 \quad (5)$$

V enačbi 5 sta $\Delta y = y_B - y_A$ in $\Delta x = x_B - x_A$ in predstavljata enačbi za funkcijsko povezavo, iz katerih dobimo jakobijevo matriko \mathbf{J} iz enačbe 4. Parametre relativne elipse pogreškov vektorja \overline{AB} so:

- Standardna elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$
- 95% elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$
- 99% elipsa pogreškov: $k = ___$, $a = ___ \text{cm}$, $b = ___ \text{cm}$ in $\theta = ___^\circ$

Na koncu še izrišimo celotno situacijo, položaje točk, vektor med točkami in vse elipse pogreškov, kar prikazuje slika 1. Rdeče so standardne elipse pogreškov, modre so 95% elipse pogreškov in zelene 99% elipse pogreškov.



Slika 1: Izris geodetske mreže in elips pogreškov