

Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodetsko inženirstvo in upravljanje nepremičnin, 2. letnik

ANALIZA OPAZOVANJ V GEODEZIJI 2 - VAJE

Elipse pogreškov

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 25. november 2025

Kazalo vsebine

Kazalo vsebine	i
Kazalo slik	ii
Kazalo preglednic	iii
1 ELIPSE POGREŠKOV	1
1.1 Motiv	1
1.2 Normalna porazdelitev dveh slučajnih spremenljivk	3
1.3 Izračun parametrov elipse pogreškov	6
1.4 Standardna elipsa pogreškov in območje zaupanja	7
1.5 Absolutna in relativna elipsa pogreškov	9
1.5.1 Absolutna elipsa pogreškov	9
1.5.2 Relativna elipsa pogreškov	9
1.6 Primer 1 – polarna izmera	11
1.7 Primer 2 – položaja dveh točk	14
1.8 Primer 3 – zunanji urez	16
1.9 Primer 4 – ločni presek	19
1.10 Primer 5 – položaj točke na krožnici	23
1.10.1 Izravnavo opazovanj po MNK	23
1.10.2 Izračun koordinat točke in pripadajoče kovariančne matrike s prenosom varianc in kovarianc	24
1.10.3 Izračun parametrov elipse pogreškov in njen izris	24
1.11 Primer 6 – ravninska geodetska mreža	25
1.11.1 Izravnavo opazovanj po MNK	25
1.11.2 Izračun položaja točke in pripadajoče kovariančne matrike	27
1.11.3 Izračun parametrov elipse pogreškov in njen izris	27

Kazalo slik

1-1	Določitev koordinat in njihovih natančnosti pri polarni izmeri	2
1-2	Izračun položajev točk T_1 in T_2 na osnovi simuliranih opazovanj pri polarni izmeri . .	3
1-3	Funkcija gostote verjetnosti dveh skupno normalno porazdeljenosti slučajnih spremenljivk v odvisnosti od statističnih parametrov	4
1-4	Izolinije funkcija gostote verjetnosti dveh skupno normalno porazdeljenosti slučajnih spremenljivk v odvisnosti od statističnih parametrov	5
1-5	Parametri elipse pogreškov - geometrični prikaz	7
1-6	Standardna elipsa pogreškov in simulacija točk	8
1-7	Standardna elipsa pogreškov, 95% elipsa pogreškov in simulirane točke v ravnini . . .	9
1-8	Določitev koordinat in njihovih natančnosti pri polarni izmeri	11
1-9	Absolutni elipsi pogreškov položajev dveh točk in relativna elipsa pogreškov med točkama	13
1-10	Izris geodetske mreže in elips pogreškov	16
1-11	Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat nove točke	16
1-12	Izris elips pogreškov na novi točki	18
1-13	Izris elips pogreškov za različne položaje nove točke	19
1-14	Opazovanja ločnega preseka za določitev koordinat nove točke	19
1-15	Izris elips pogreškov na novi točki	21
1-16	Izris elips pogreškov za različne položaje nove točke	22
1-17	Opazovanja za določitev koordinat točke na krožnici	23
1-18	Izris elipse pogreškov nove točke na krožnici	24
1-19	Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja nove točke	25
1-20	Standardna in 95% elipsa pogreškov položaja nove točke	28

Kazalo preglednic

1-1 Določitev velikosti in pripadajoče verjetnosti različnih elips pogreškov	8
--	---

1 ELIPSE POGREŠKOV

Pri zakonu o prenosu varianc in kovarianc (glej poglavje [Zakon o prenosu varianc in kovarianc](#)) smo videli, da lahko izračunamo variančno-kovariančno matriko Σ_{yy} neznank $\mathbf{y}$, če imamo na voljo opazovanja $\mathbf{x}$ in če poznamo funkcijsko povezavo $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ med opazovanji in neznankami. Ena izmed najbolj pomembnih nalog, če ne kar najbolj pomembna naloga, v geodeziji je izračun koordinat točk in ocena kakovosti položaja točk. Položaj točke tradicionalno razdelimo na horizontalno komponento (državna projekcija) in na višinsko komponento, zato je tudi izračun ponavadi ločen. V horizontalni ravnini želimo določiti položaj točke in ga tudi ovrednotiti, kar naredimo s kovariančno matriko položaja točke. Dobimo natančnosti obeh koordinat (σ_y in σ_x) in njuno korelacijo (ρ_{yx}). Zanima pa nas, ali obstaja tudi način podajanja natančnosti položaja točke v ravnini, ki bi bil geometrično predstavljen in hkrati koordinatno neodvisen¹. Izkáže se, da to lahko naredimo z **elipsami pogreškov**.

1.1 Motiv

Pri zakonu o prenosu varianc in kovarianc smo na metodah določitve koordinat (polarna izmera, zunanji vrez, ločni presek, izmera GNSS) prikazali, kako kakovostno so določene koordinate in kakšne oblike so rezultati. Obravnavajmo tudi tu polarno izmero, kjer so podatki dani kot:

- dve dani točki: $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 90,0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (30,0 \text{ m}, 10,0 \text{ m})$,
- dve novi točki: $T_1(y_1, x_1)$ in $T_2(y_2, x_2)$,
- opazovanja: $\alpha_1 = 80^\circ$ in $\alpha_2 = 40^\circ$ ter $d_1 = d_2 = d = 65,0 \text{ m}$,
- natančnosti opazovanj: $\sigma_d = 2 \text{ mm}$ in $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 3''$

Situacijo prikazuje slika 1-1.

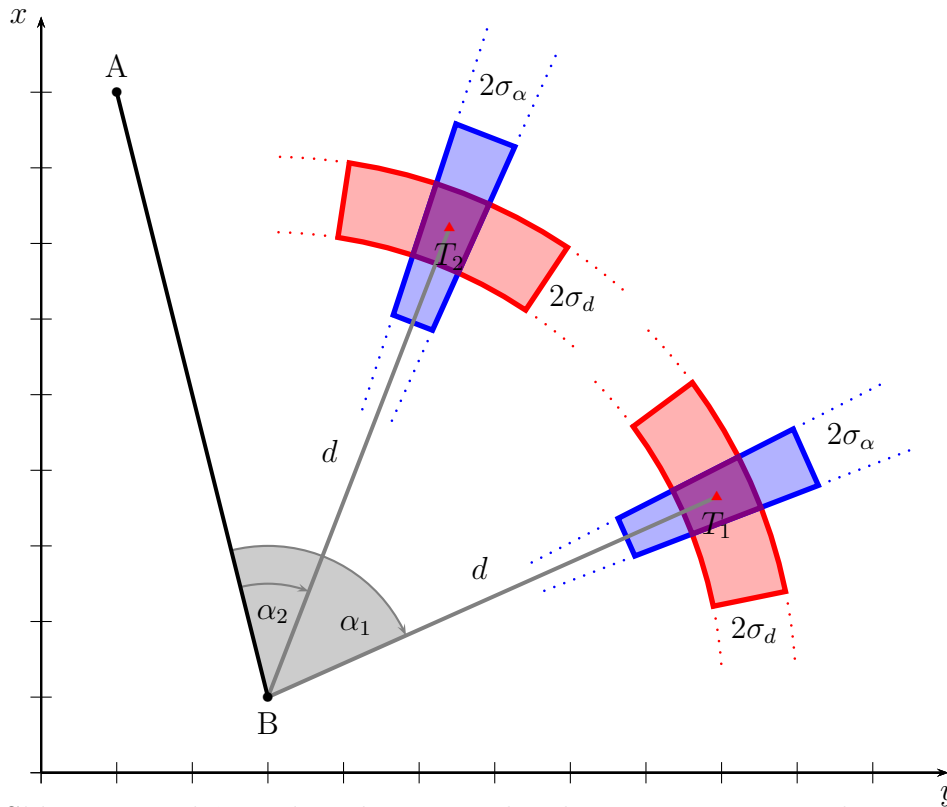
Enačbe za izračun položaja točk T_1 in T_2 so:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = 89,364 \text{ m} \\ x_1 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = 36,475 \text{ m} \\ y_2 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = 58,457 \text{ m} \\ x_2 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = 68,440 \text{ m} \end{aligned} \tag{1-1}$$

Na osnovi zakona o prenosu varianc in kovarianc lahko izračunamo kovariančni matriki obeh točk, Σ_1 in Σ_2 . Sestavimo kovariančno matriko opazovanj ($\Sigma_{d\alpha}$), na osnovi enačb (1-1) izračunamo jakobijevo matriko za obe točki, $\mathbf{J}_1$ in $\mathbf{J}_2$, in dobimo:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \begin{bmatrix} 3,485 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1,156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 1,156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1,409 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \\ \Sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1,489 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1,223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 1,223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 3,405 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1-2}$$

¹kaj to pomeni, bomo videli v nadaljevanju



Slika 1–1: Določitev koordinat in njihovih natančnosti pri polarni izmeri

Iz obeh kovariančnih matrik iz enačbe (1–2) lahko sedaj izračunamo natančnosti in korelacije koordinat obeh točk. Dobimo:

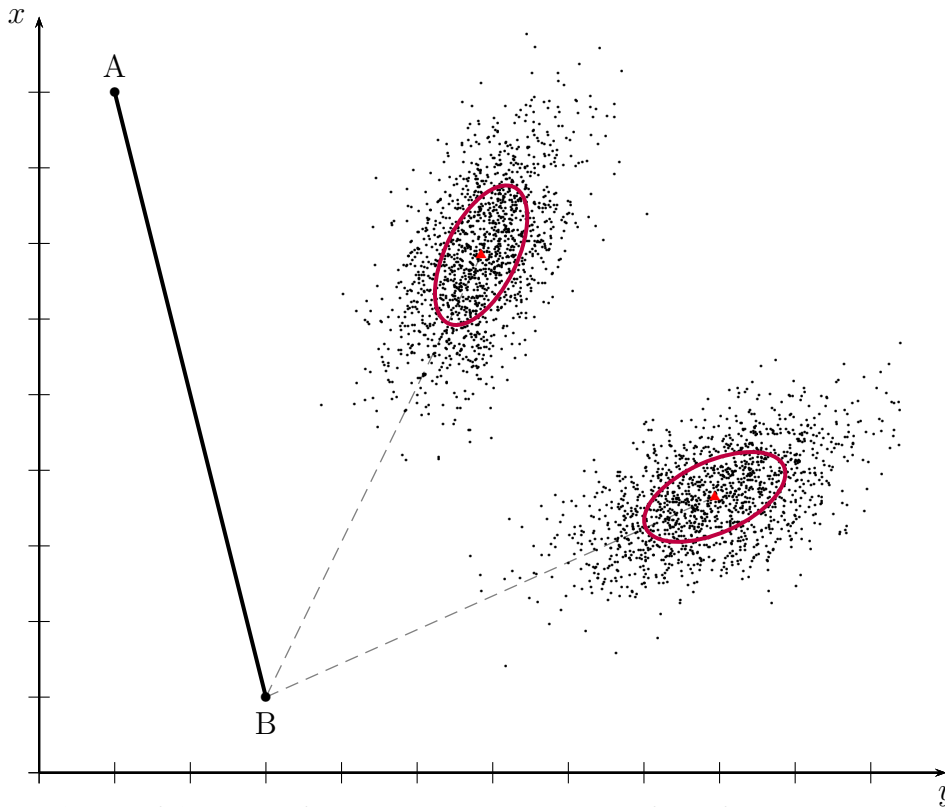
$$\begin{array}{lll} \sigma_{y_1} = 1,87 \text{ mm} & \sigma_{x_1} = 1,19 \text{ mm} & \rho_{y_1 x_1} = 0,52 \\ \sigma_{y_2} = 1,22 \text{ mm} & \sigma_{x_2} = 1,85 \text{ mm} & \rho_{y_2 x_2} = 0,54 \end{array} \quad (1-3)$$

Rezultati iz enačbe (1–3) kažejo na zelo različne informacije o natančnosti koordinat obeh točk, po drugi strani pa na sliki 1–1 lahko vidimo, da sta obliki in velikosti obeh vijoličnih likov enaka. Pričakovali torej bi, da bi dobili enake informacije o natančnostih koordinat obeh točk.

Prvo, kar se vprašamo je, ali je slika 1–1 sploh pravi prikaz kakovosti določitve koordinat na osnovi izmerjenega kota α_1 (ali α_2) in dolžine d ? To lahko enostavno preverimo tako, da izvedemo simulacijo polarne izmere. Predpostavke, ki jih naredimo:

- $d \sim N(\bar{d}, \sigma_d = 2,00 \text{ mm})$, kar beremo kot: slučajna spremenljivka dolžina d se porazdeljuje po normalni porazdelitvi, s srednjo vrednostjo $\bar{d}$ in standardnim odklonom σ_d ,
- $\alpha_1 \sim N(\bar{\alpha}_1, \sigma_\alpha = 3,00'')$ in $\alpha_2 \sim N(\bar{\alpha}_2, \sigma_\alpha = 3,00'')$
- število simuliranih položajev: $n_s = 1500$

Za obe točki simulirajmo $n_s = 1500$ izračunanih položajev, kjer v vsakem koraku simulacije pravim vrednostim opazovanj prištejemo naključne vrednosti pogreškov, ki imajo zgoraj predpostavljene statistične lastnosti. Sedaj za obe točki izrišimo vse izračunane položaje, kar je prikazano na sliki 1–2. Iz slike je razvidno, da območje, kjer so podane izmerjene točke ni nič podobno obliki vijoličnega območja (pravokotniku) s slike 1–1. Izkaže se, da se točke porazdelijo v obliki elipse, kjer je gostota točk večja v bližini sredine elipse (rdeča trikotnika) in se gostota točk z oddaljenjem od sredine zmanjšuje. Elipsi pogreškov sta prikazani s škrlatno polno črto. Naslednje vprašanje pa je, od kje izhaja oblika elipse in kako dobiti parametre elipse pogreškov.

Slika 1–2: Izračun položajev točk T_1 in T_2 na osnovi simuliranih opazovanj pri polarni izmeri

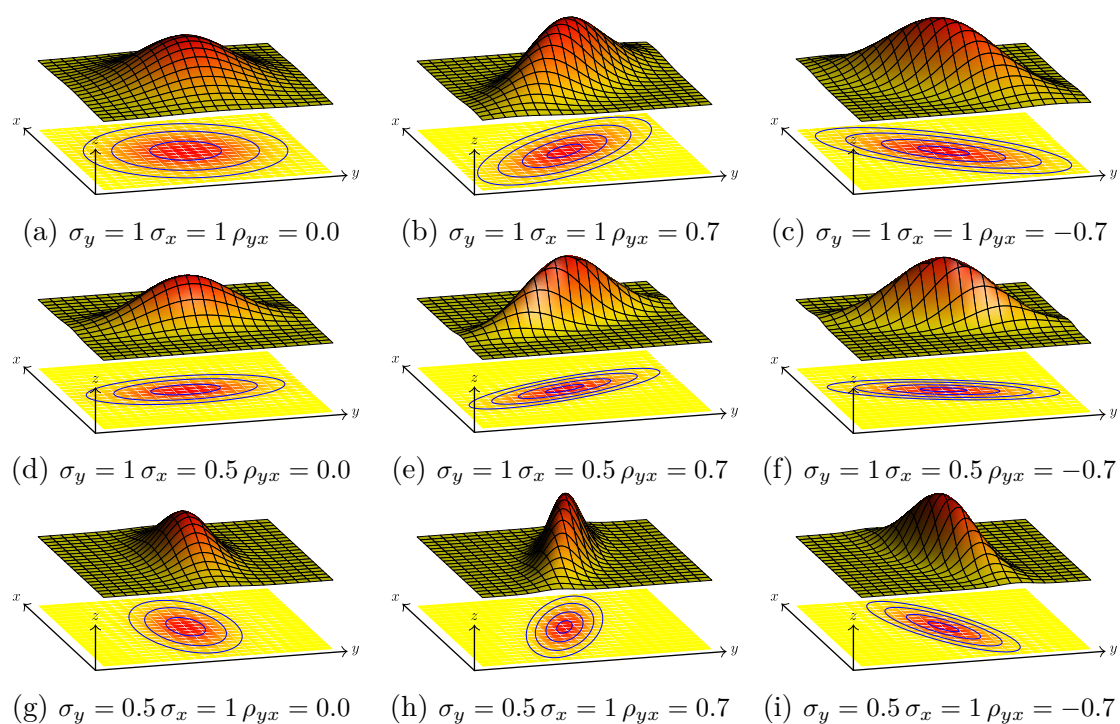
1.2 Normalna porazdelitev dveh slučajnih spremenljivk

Iz rezultatov polarne izmere iz enačb (1–2) in (1–3) vidimo, da lahko koordinati y in x točke T obravnavamo kot skupno porazdeljeni slučajni spremenljivki, ki se porazdeljujeta po normalni porazdelitvi. Funkcijo gostote verjetnosti obeh slučajnih spremenljivk y in x lahko opišemo v obliki:

$$f(y, x) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_x\sqrt{1-\rho_{yx}^2}} e^{-\left\{\frac{1}{2(1-\rho_{yx}^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho_{yx}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right) + \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right]\right\}} \quad (1-4)$$

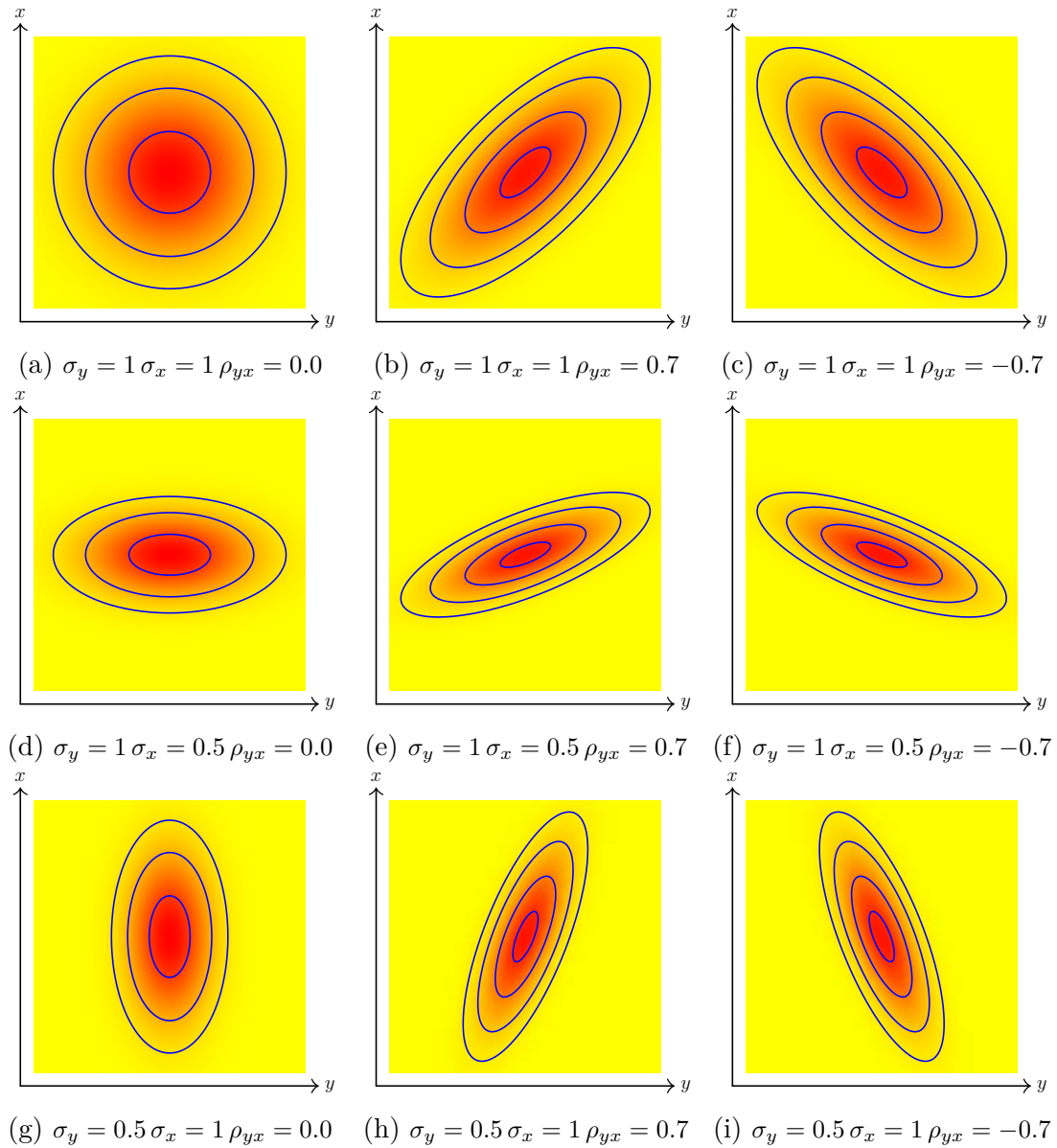
V enačbi (1–4) sta μ_y in μ_x srednji vrednosti, σ_y in σ_x standardna odklona in ρ_{yx} korelacija spremenljivk y in x . Grafično lahko enačbo (1–4) prikažemo z zvonasto ploskvijo, kjer je oblika in orientacija te zvonaste ploskve odvisna od treh količin, in sicer od σ_y , σ_x in ρ_{yx} . Lokacija vrha ploskve pa je odvisna od srednjih vrednosti μ_y in μ_x . Slika 1–3 prikazuje obliko zvonaste ploskve iz enačbe (1–4) pri različnih vrednostih parametrov σ_y , σ_x in ρ_{yx} . Slike 1–3a, 1–3b in 1–3c v prvi vrsti prikazujejo enaki natančnosti spremenljivk ($\sigma_y = \sigma_x$), le da so korelacije različne, od $\rho_{yx} = 0.0$, do $\rho_{yx} = 0.7$ in $\rho_{yx} = -0.7$. Slike 1–3d, 1–3e in 1–3f v drugi vrsti prikazujejo vpliv različne korelacije pri različno natančnih spremenljivkah y in x ($\sigma_y = 1$, $\sigma_x = 0.5$). Slike 1–3g, 1–3h in 1–3i pa prikazujejo podobno situacijo kot slike v drugi vrsti, le da je sedaj koordinata y bolj natančna ($\sigma_y = 0.5$, $\sigma_x = 1$). V ravnini yx so prikazane izolinije in barvni prikaz funkcije gostote verjetnosti za vse primere.

Slika 1–4 prikazuje izolinije funkcije gostote verjetnosti za vse primere prikaza s slike 1–3. Izolinije si lahko predstavljamo tudi tako, da ploskve funkcije gostote verjetnosti iz enačbe (1–3) sekamo z ravnino, ki je vzporedna ravnini yx , podana za različne vrednosti koordinate z . Če imamo dve spremenljivki enake natančnosti in medseboj nekorelirana, potem so izolinije krožnice (slika 1–4a). Takoj, ko imamo korelirani spremenljivki, izolinije postanejo elipse (slike 1–4b in 1–4c), pri tem da pozitivna korelacija povzroči usmerjenost elipse v smeri premice $y = x$, negativna pa v obratni smeri, $y = -x$. V primeru, ko pa spremenljivki nista enake natančnosti, pa so izolinije vedno elipse (slike



Slika 1–3: Funkcija gostote verjetnosti dveh skupno normalno porazdeljenosti slučajnih spremenljivk v odvisnosti od statističnih parametrov

1–4d, 1–4e, 1–4f, 1–4g, 1–4h in 1–4i). Ko korelacije ni, je elipsa vedno usmerjena (raztegnjena) v smeri tiste koordinate, ki je slabše natančnosti, v smeri y osi na sliki 1–4d oziroma v smeri x osi na sliki 1–4g. Vpliv korelacije na slikah 1–4e, 1–4f, 1–4h in 1–4i pa je podoben kot na slikah 1–4b in 1–4c, le da je od natančnosti koordinat odvisno, ali bo elipsa bolj pokončna, ali ne.



Slika 1–4: Izolinije funkcija gostote verjetnosti dveh skupno normalno porazdeljenosti slučajnih spremenljivk v odvisnosti od statističnih parametrov

Matematično, pa imajo preseki (izolinije) s slik 1–4 obliko, ki je določena z enačbo:

$$\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho_{yx} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right) \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) + \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 = (1 - \rho_{yx}^2)k^2 \quad (1-5)$$

Enačba (1–5) v splošnem prikazuje obliko elipse, kar je razvidno s slik 1–4. Faktor k iz enačbe (1–5) predstavlja konstanto, ki nam določi “višino” presečne ravnine nad ravnino yx , oz. nam določi velikost elipse, večji kot je k , večja je elipsa. Faktor k se določi kot:

$$k^2 = -2 \ln \left(C 2\pi \sigma_y \sigma_x \sqrt{1 - \rho_{yx}^2} \right) \quad (1-6)$$

Konstanta C v enačbi (1–6) predstavlja konstantno vrednost funkcije gostote verjetnosti $f(y, x) = C$ iz enačbe (1–4).

1.3 Izračun parametrov elipse pogreškov

Pri poljubni vrednosti faktorja k iz enačbe (1-6) lahko določimo velikost in obliko elipse pogreškov, kar dobimo tako, da izračunamo tri parametre elipse pogreškov, in sicer:

1. velika polos elipse pogreškov: a ,
2. mala polos elipse pogreškov: b ,
3. matematični kot zasuka velike polosi elipse, glede na izhodiščni (yx) koordinatni sistem: θ .

Za izračun parametrov elipse pogreškov izhajamo iz variančno-kovariančne matrike Σ_{yx} položaja točke, ki je določena z:

$$\Sigma_{yx} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad \sigma_{yx} = \rho_{yx}\sigma_y\sigma_x \quad (1-7)$$

Iz vsebine kovariančne matrike Σ_{yx} v enačbi (1-7) vidimo, da kovariančno matriko sestavljajo trije podatki, in sicer σ_y , σ_x in ρ_{yx} . Izračun parametrov elipse pogreškov (a , b in θ) dobimo iz elementov kovariančne matrike Σ_{yx} , in sicer, da matriki Σ_{yx} poiščemo obe lastni vrednosti in orientacijo obeh lastnih vektorjev v ravnini. Rešitev dobimo tako, da poiščemo netrivialno rešitev za lastni vrednosti λ_1 in λ_2 ter pripadajoča lastna vektorja $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_2$ enačbe:

$$(\Sigma_{yx} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1-8)$$

Rešitev enačbe (1-8) je dana z dvema lastnima vrednostima λ_1 in λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \\ \lambda_2 &= \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \end{aligned} \quad (1-9)$$

Lastni vrednosti iz enačbe (1-9) predstavljata osnovo za izračun velike in male polosi elipse pogreškov, saj velja:

$$a = \sqrt{\lambda_1} \quad b = \sqrt{\lambda_2} \quad (1-10)$$

Orientacijo elipse določimo z izračunom kota θ , ki ga izračunamo iz enačbe:

$$\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{yx}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2} \quad (1-11)$$

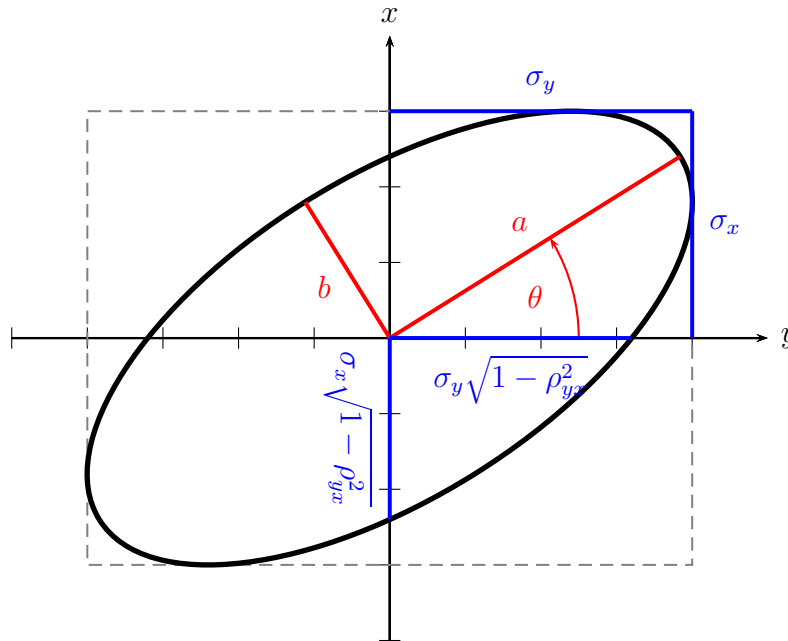
Za pravilno vrednost kota θ iz enačbe (1-11) moramo enačbo rešiti na enak način kot smerni kot. Upoštevajoč kvadrante (predznaka števca in imenovalca) izračunamo vrednost 2θ med 0° in 360° , nato pa kot θ dobimo z deljenjem z 2. Praktičen izračun je tudi z uporabo funkcije `atan2`, ki je implementirana pri večini programskih jezikov. Velja:

$$\theta = \frac{\text{atan2}(2\sigma_{yx}, \sigma_y^2 - \sigma_x^2)}{2} \quad (1-12)$$

Kot zasuka θ predstavlja kot med absciso (v našem primeru y osjo) in veliko polosjo elipse pogreškov a (lastnim vektorjem $\mathbf{x}_1$, ki pripada največji lastni vrednosti λ_1). Ker je kovariančna matrika

simetrična, je drugi lastni vektor $\mathbf{x}_2$ (pripada drugi lastni vrednosti λ_1) pravokoten na $\mathbf{x}_1$. Tako $\mathbf{x}_1$ prikazuje smer največje vrednosti variance (najslabšo natančnost, določena s polosjo a) in $\mathbf{x}_2$ smer najmanjše variance (najboljša natančnost, določena s polosjo b).

Geometrično pa si elipso pogreškov, ki je določena s parametri a , b in θ , v povezavi s parametri kovariančne matrike Σ_{yx} , ki so σ_y , σ_x in ρ_{yx} , predstavimo na spodnji sliki.



Slika 1–5: Parametri elipse pogreškov - geometrični prikaz

1.4 Standardna elipsa pogreškov in območje zaupanja

Kadar računamo elipso pogreškov tako, da polosi elipse pogreškov (a in b) predstavljata korena lastnih vrednosti (λ_1 in λ_2), kot je to prikazano v enačbi (1–10), govorimo o t.i. **standardni elipsi pogreškov**. V tem primeru ima faktor k iz enačbe (1–6) vrednost 1. Simulirajmo tudi tu položaj točke, podobno kot smo to naredili za točki T_1 in T_2 na sliki 1–2. Izhodiščni podatki za simulacijo so:

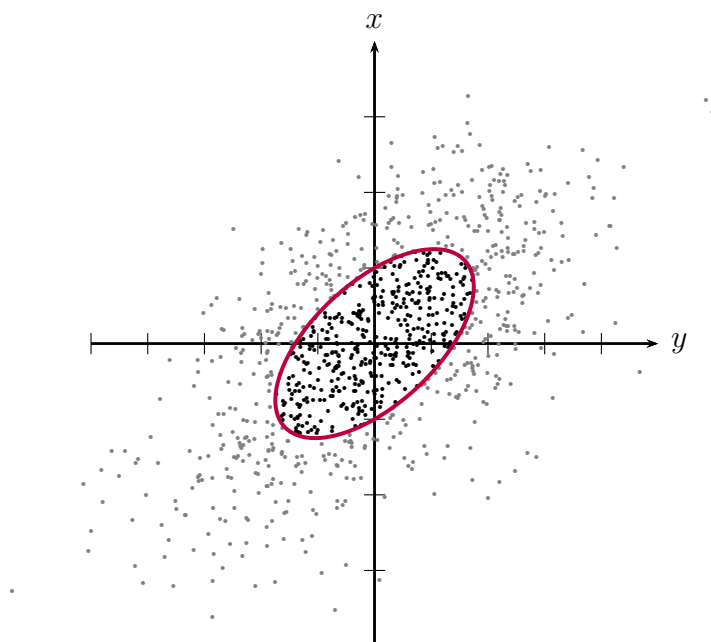
$$\sigma_y = 1,75 \quad \sigma_x = 1,25 \quad \rho_{yx} = 0,60$$

Parametri elipse pogreškov, izračunani na osnovi enačbe (1–10) za polosi a in b ter enačbe (1–11) za kot θ , pa so:

$$a = 1,96 \quad b = 0,90 \quad \theta = 20,13^\circ$$

Elipso pogreškov in simulirane položaje okoli srednje vrednosti obeh koordinat točke T prikazuje slika 1–6.

S slike 1–6 vidimo, da so nekatere točke znotraj elipse pogreškov (črne pike), ostale točke pa so zunaj elipse pogreškov (sive pike). Z elipso pogreškov skušamo pokazati območje zaupanja izračunanega položaja točke, v smislu, da se pravi položaj točke nahaja znotraj elipse pogreškov. A iz slike vidimo, da kar znaten del točk pade izven elipse. Število položajev simuliranih točk, ki padejo v notranjost standardne elipse pogreškov je samo 39,40%, kar predstavlja dobro tretjino. Vsi ostali položaji so izven standardne elipse pogreškov. Ali če povemo drugače, ko določimo koordinate neke točke, je verjetnost, da leži pravi položaj točke znotraj elipse pogreškov le 39,40%. Če želimo to verjetnost



Slika 1–6: Standardna elipsa pogreškov in simulacija točk

povečati, moramo izbrati faktor k iz enačbe (1–6) ustrezno večji od 1 in tako polosi elipse pogreškov izračunati kot:

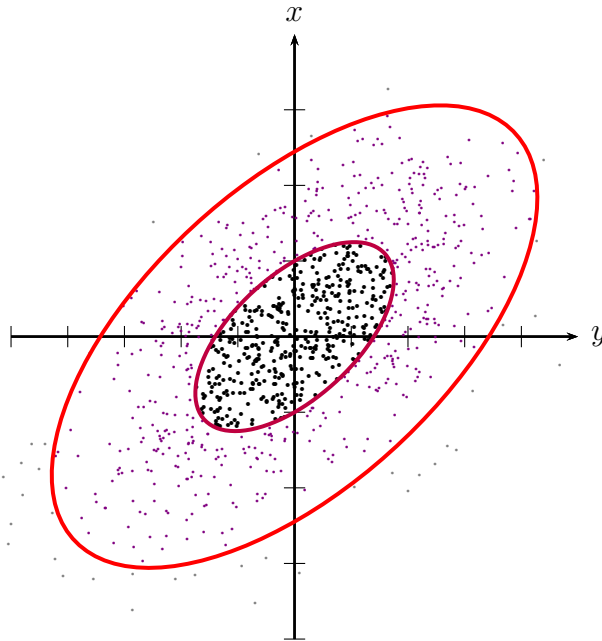
$$a = k\sqrt{\lambda_1} \quad b = k\sqrt{\lambda_2} \quad (1-13)$$

Za različne vrednosti faktorja k dobimo različne vrednosti verjetnosti (oznaka P v preglednici 1–1), s katero želimo opisati natančnost določenega položaja točke. Preglednica 1–1 prikazuje odvisnost iskane verjetnosti od vrednosti faktorja k . Poudarjen izpis prikazuje največkrat uporabljene elipse pogreškov, in sicer standardno elipso pogreškov ($k = 1.000$, $P = 0.394$) in t.i. 95% elipso pogreškov ($k = 2.448$, $P = 0.95$).

k	P
1.000	0.394
1.177	0.500
2.000	0.865
2.146	0.900
2.448	0.950
3.035	0.990

Preglednica 1–1: Določitev velikosti in pripadajoče verjetnosti različnih elips pogreškov

Slika 1–7 prikazuje standardno elipso pogreškov s slike 1–6 v škrlatni barvi in vse simulirane položaje točk, ki so znotraj standardne elipse pogreškov v črni barvi. Večja elipsa pogreškov je 95% elipsa pogreškov (rdeča barva). Znotraj te elipse pogreškov je 95% vseh simuliranih položajev, a je kar 2.448-krat večja od standardne elipse pogreškov. Vsi simulirani položaji, ki so znotraj te elipse so označeni z vijolično in črno barvo. Ostalih 5% položajev je sive barve in se nahajajo izven elipse pogreškov.



Slika 1–7: Standardna elipsa pogreškov, 95% elipsa pogreškov in simulirane točke v ravnini

1.5 Absolutna in relativna elipsa pogreškov

1.5.1 Absolutna elipsa pogreškov

Absolutno elipso pogreškov računamo na osnovi kovariančne matrike Σ_{yx} posamezne točke. Če imamo podano kovariančno Σ matriko večih točk geodetske mreže, vzamemo za osnovo odgovarjajočo kvadratno podmatriko na diagonali celotne matrike. Izračun parametrov elipse pogreškov poteka po enačbah iz poglavja 1.3, veliko in malo polos standardne elipse pogreškov izračunamo na osnovi enačbe (1–10), kot zasuka na osnovi enačbe (1–11), polosi za elipse pogreškov večje verjetnosti pa na osnovi enačbe (1–13), kjer faktor k dobimo iz preglednice 1–1. Izris absolutne elipse pogreškov:

- središče absolutne elipse pogreškov je točka,
- merilo izrisa elipse pogreškov ni enako merilu celotne skice geodetske mreže.

1.5.2 Relativna elipsa pogreškov

Relativno elipso pogreškov določamo med dvema točkama T_1 in T_2 , ki imata položaja podana v vektorju $\mathbf{p}_{12}$ in kakovost položaja z variančno kovariančno matriko Σ_{12} :

$$\mathbf{p}_{12} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 x_1} & \sigma_{y_1 y_2} & \sigma_{y_1 x_2} \\ \sigma_{y_1 x_1} & \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_2} & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{y_1 y_2} & \sigma_{x_1 y_2} & \sigma_{y_2}^2 & \sigma_{y_2 x_2} \\ \sigma_{y_1 x_2} & \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{y_2 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

Pri relativni elipsi pogreškov moramo izračunati kovariančno matriko $\Sigma_{\Delta y \Delta x}$, ki se nanaša na vektor $\Delta \mathbf{p}$ med točkama T_1 in T_2 in ima obliko:

$$\Delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{\Delta y \Delta x} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta y}^2 & \sigma_{\Delta y \Delta x} \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} & \sigma_{\Delta x}^2 \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

Kovariančno matriko $\Sigma_{\Delta y \Delta x}$ iz enačbe (1-15) dobimo na osnovi zakona o prenosu varianc in kovarianc, izhajamo pa iz enačbe (1-15) za izračun komponent vektorja $\Delta \mathbf{p}$ in enačbe (1-14), kjer imamo kovariančno matriko Σ_{12} , in sicer:

$$\Sigma_{\Delta y \Delta x} = \mathbf{J} \Sigma_{12} \mathbf{J}^T \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \right) \quad (1-16)$$

Elemente matrike v enačbi (1-15) dobimo preko izračuna iz enačbe (1-16) in so podani v enačbi (1-17):

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta y}^2 &= \sigma_{y_1}^2 - 2\sigma_{y_1 y_2} + \sigma_{y_2}^2 \\ \sigma_{\Delta x}^2 &= \sigma_{x_1}^2 - 2\sigma_{x_1 x_2} + \sigma_{x_2}^2 \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} &= \sigma_{y_1 x_1} + \sigma_{y_2 x_2} - \sigma_{y_1 x_2} - \sigma_{y_2 x_1} \end{aligned} \quad (1-17)$$

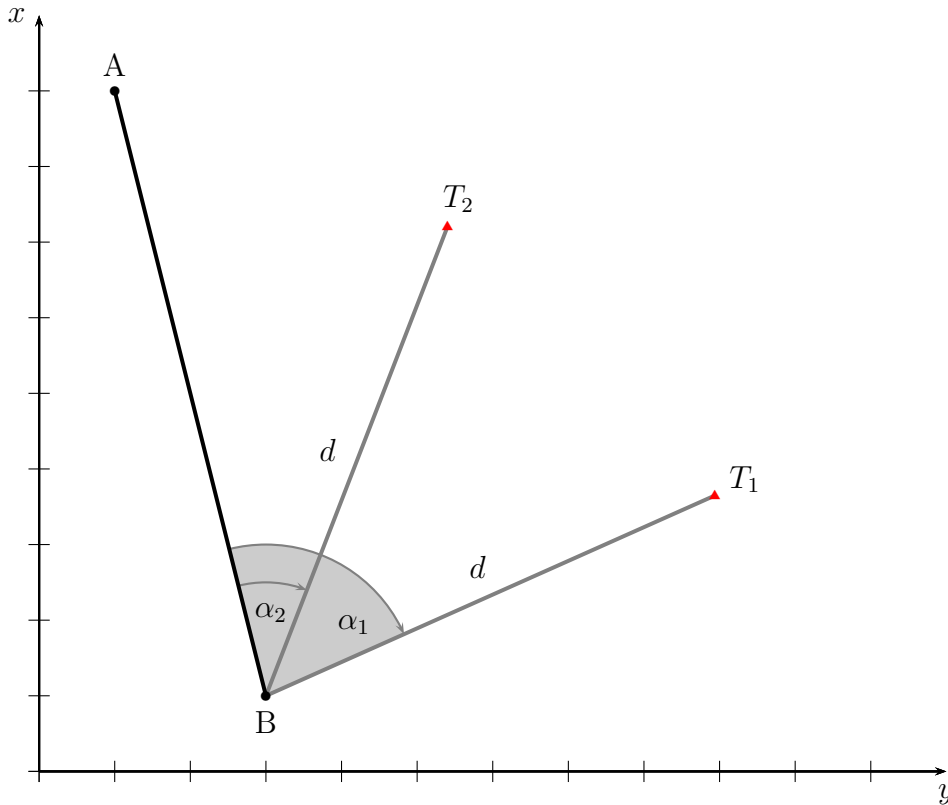
Relativna elipsa pogreškov prikazuje natančnost relativnih položajev med točkami. Natančnost položaja geodetske točke je odvisna od dveh količin, in sicer natančnosti položajev danih točk in natančnosti opazovanj. Kadar imamo položaje danih točk slabe bodo absolutne elipse točk prav tako slabe. Z relativnimi elipsami pogreškov tako lahko ocenimo natančnost relativnega položaja točk med seboj.

Izris relativne elipse pogreškov:

- središče relativne elipse pogreškov je na sredini zveznice $\overline{T_1 T_2}$,
- merilo izrisa elips pogreškov naj ne bo enakov merilu celotne skice.

1.6 Primer 1 – polarna izmera

Rešimo primer, ki smo si ga podali v poglavju 1.1. Določiti želimo koordinate dveh novih točk, T_1 in T_2 , pri tem, da bomo izhajali iz dveh danih točk $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 90,0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (30,0 \text{ m}, 10,0 \text{ m})$, opazovali pa bi $\alpha_1 = 80^\circ$ in $\alpha_2 = 40^\circ$ ter $d_1 = d_2 = d = 65,0 \text{ m}$, ki imajo natančnosti $\sigma_d = 2,0 \text{ mm}$ in $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 3,0''$. Prikaz situacije je podan na sliki 1–8. Izračunaj koordinate novih točk ($T_1(y_1, x_1)$, $T_2(y_2, x_2)$), določi variančno-kovariančno matriko obeh točk (Σ_{12}), določi natančnosti vseh koordinat obeh točk (σ_{y_1} , σ_{x_1} , σ_{y_2} in σ_{x_2}) ter vse njihove korelacije ($\rho_{y_1x_1}$, $\rho_{y_2x_2}$, $\rho_{y_1y_2}$, $\rho_{y_1x_2}$, $\rho_{x_1y_2}$, $\rho_{x_1x_2}$). Izračunaj tudi parametre absolutne elipse pogreškov na obeh točkah, parametre 95% elipse pogreškov, relativno standardno elipso pogreškov in relativno 95% elipso pogreškov med točkama T_1 in T_2 .



Slika 1–8: Določitev koordinat in njihovih natančnosti pri polarni izmeri

Izhajamo iz enačb poligona za izračun položaja točk T_1 in T_2 , ki so (rezultati so seveda enaki kot v poglavju 1.1, v enačbi (1–1):

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = y_B + d \sin \nu_B^{T_1} = 89,364 \text{ m} \\
 x_1 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = x_B + d \cos \nu_B^{T_1} = 36,475 \text{ m} \\
 y_2 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = y_B + d \sin \nu_B^{T_2} = 58,457 \text{ m} \\
 x_2 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = x_B + d \cos \nu_B^{T_2} = 68,440 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{1–18}$$

Smerni kot ν_A^B iz enačbe (1–18) je enak $\nu_A^B = 165^\circ 57' 49,5''$, medtem ko sta smerna kota $\nu_B^{T_1} = 65^\circ 57' 49,5''$ in $\nu_B^{T_2} = 25^\circ 57' 49,5''$. Izračun neznank iz enačbe (1–18) temelji na štirih opazovanjih, in

sicer $d_1 = d_2 = d$, α_1 in α_2 , za katere je kovariančna matrika enaka:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,000 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,115 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,000 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,115 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

Na osnovi funkcijskih povezav med opazovanji in neznankami iz enačbe (1-18) sestavimo jakobijevo matriko $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sin \nu_B^{T_1} & d \cos \nu_B^{T_1} & 0 & 0 \\ \cos \nu_B^{T_1} & -d \sin \nu_B^{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \nu_B^{T_2} & d \cos \nu_B^{T_2} \\ 0 & 0 & \cos \nu_B^{T_2} & -d \sin \nu_B^{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,913 & 26,475 \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0,407 & -59,364 \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,438 & 58,440 \text{ m}^2 \\ 0 & 0 & 0,899 & -28,457 \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

Variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{12}$ izračunamo kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{12} = \mathbf{J} \mathbf{\Sigma} \mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} 3,485 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1,156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 1,156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1,409 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,489 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1,223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 0 & 0 & 1,223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 3,405 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

Iz oblike kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{12}$ iz enačbe (1-21) lahko ugotovimo, da so:

- natančnosti koordinat in korelacije koordinat iste točke:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= 1,867 \text{ mm} & \sigma_{x_1} &= 1,187 \text{ mm} & \rho_{y_1 x_1} &= 5,215 \times 10^{-1} \\ \sigma_{y_2} &= 1,220 \text{ mm} & \sigma_{x_2} &= 1,845 \text{ mm} & \rho_{y_2 x_2} &= 5,430 \times 10^{-1} \end{aligned} \quad (1-22)$$

- korelacije med koordinatami različnih točk:

$$\rho_{y_1 y_2} = \rho_{y_1 x_2} = \rho_{x_1 y_2} = \rho_{x_1 x_2} = 0 \quad (1-23)$$

Za izračun elips pogreškov za obe točki vzamemo dve pod-matriki kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{12}$, za točko T_1 prvi dve vrstici in prva dva stolpca, za točko T_2 pa zadnji dve vrstici in stolpca. Za polosi elipse uporabimo enačbo (1-10), za kot zasuka pa enačbo (1-12). Dobimo:

- standardna elipsa pogreškov in 95% elipsa pogreškov na točki T_1 :

$$\begin{aligned} a &= 2,00 \text{ mm} & b &= 0,95 \text{ mm} & \theta &= 24,036^\circ \\ a_{95\%} &= 4,90 \text{ mm} & b_{95\%} &= 2,32 \text{ mm} & \theta_{95\%} &= 24,036^\circ \end{aligned} \quad (1-24)$$

- standardna elipsa pogreškov in 95% elipsa pogreškov na točki T_2 :

$$\begin{aligned} a &= 2,00 \text{ mm} & b &= 0,95 \text{ mm} & \theta &= 64,036^\circ \\ a_{95\%} &= 4,90 \text{ mm} & b_{95\%} &= 2,32 \text{ mm} & \theta_{95\%} &= 64,036^\circ \end{aligned} \quad (1-25)$$

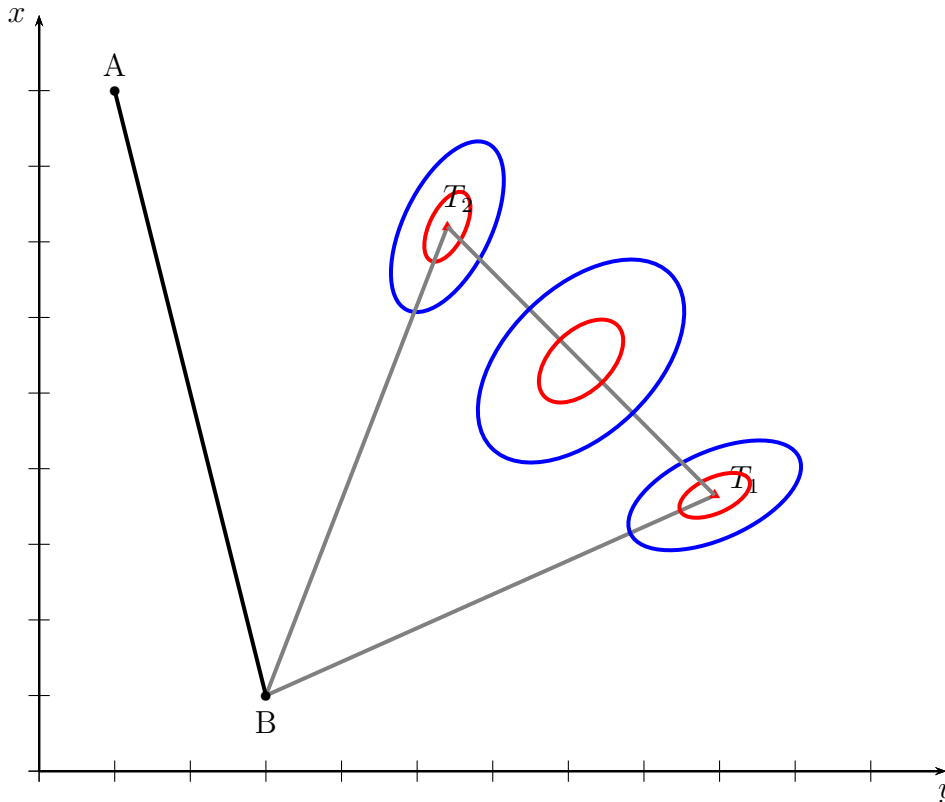
Izračunajmo še parametre relativne elipse pogreškov za vektor $\overline{T_1 T_2}$. Kovariančna matrika $\Sigma_{\Delta y \Delta x}$ ima obliko:

$$\Sigma_{\Delta y \Delta x} = \begin{bmatrix} 4,974 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 2,378 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 2,378 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 4,814 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

Parametre standardne relativne elipse pogreškov in 95% relativne elipse pogreškov dobimo kot:

$$\begin{array}{lll} a = 2,70 \text{ mm} & b = 1,59 \text{ mm} & \theta = 44,036^\circ \\ a_{95\%} = 6,61 \text{ mm} & b_{95\%} = 3,88 \text{ mm} & \theta_{95\%} = 44,036^\circ \end{array} \quad (1-27)$$

Rezultati, ki smo jih dobili v tem primeru so potrebni komentarja. Kot prvo lahko vidimo, da sta oblika in velikost elipse pogreškov na točkah T_1 in T_2 enaki (enačbi (1-24) in (1-25)). Ker sta obe točki izmerjeni na enak način (enak inštrumentarij, enaka dolžina), le kot je drugačen, je rezultat pričakovan. Za elipse pogreškov pravimo da so koordinatno neodvisne, saj bo oblika in velikost elipse vedno enaka pod enakimi pogoji izmere, neglede na to, kje je orientacija za polarno izmero. Da vidimo, kaj predstavljata velika in mala polos elipse pogreškov, pa prvo pogledjmo izrisane elips pogreškov na sliki 1-9.



Slika 1-9: Absolutni elipsi pogreškov položajev dveh točk in relativna elipsa pogreškov med točkama

S slike 1-9 je razvidno, da sta obe absolutni elipsi pogreškov usmerjeni ravno v smeri merjene dolžine (oz. poltrak merjenega kota). Oba kota zasuka elipse pogreškov sta dejansko enaka razliki obeh smernih kotov do 90° . Kaj pa predstavljata velikosti polosi? Velika polos je pri obeh točkah enaka $a = 2,00 \text{ mm}$, kar je ravno natančnost izmerjene dolžine σ_d . Mala polos pa je enaka $b = 0,95 \text{ mm}$, kar pa ravno predstavlja produkt $d\sigma_{\alpha}$, če ga predstavimo v milimetrih. Velikosti polosi sta ravno natančnosti opazovanj.

Še zadnje, relativna elipsa pogreškov. Ker so koordinate točk T_1 in T_2 medseboj nekorelirane, je relativna elipsa pogreškov ravno super-pozicija obeh elips pogreškov, tako po velikosti, kot tudi po usmerjenosti.

1.7 Primer 2 – položaja dveh točk

V državnem koordinatnem sistemu imamo podane koordinate dveh točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10,0\text{ m}, 10,0\text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (40,0\text{ m}, 35,0\text{ m})$. Podane imamo pa tudi natančnosti in korelacije koordinat obeh točk, in sicer:

- na točki A : $\sigma_{y_A} = 1,7\text{ cm}$, $\sigma_{x_A} = 2,1\text{ cm}$ in $\rho_{y_A x_A} = -0,1$
- na točki B : $\sigma_{y_B} = 2,0\text{ cm}$, $\sigma_{x_B} = 1,9\text{ cm}$ in $\rho_{y_B x_B} = 0,1$
- korelacije: $\rho_{y_A y_B} = -0,2$, $\rho_{y_A x_B} = 0,2$, $\rho_{x_A y_B} = -0,1$ in $\rho_{x_A x_B} = -0,1$

Izračunaj:

- kovariančno matriko Σ_{AB} položajev (koordinat) točke A in B ,
- parametre absolutne elipse pogreškov na točki A , in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov,
- parametre absolutne elipse pogreškov na točki B , in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov,
- kovariančno matriko $\Sigma_{\overline{AB}}$ vektorja $\overline{AB}$ in
- parametre relativne elipse pogreškov vektorja $\overline{AB}$, in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov.

Elipse tudi izrišite.

Podane imamo koordinate dveh točk, A in B , kovariančna matrika Σ_{AB} položajev obeh točk je torej velikosti 4×4 in ima obliko:

$$\begin{aligned} \Sigma_{AB} &= \begin{bmatrix} \sigma_{y_A}^2 & \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{y_A x_B} \\ \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{x_A}^2 & \sigma_{x_A y_B} & \sigma_{x_A x_B} \\ \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{x_A y_B} & \sigma_{y_B}^2 & \sigma_{y_B x_B} \\ \sigma_{y_A x_B} & \sigma_{x_A x_B} & \sigma_{y_B x_B} & \sigma_{x_B}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2,89 \times 10^{-4} & -3,57 \times 10^{-5} & -6,80 \times 10^{-5} & 6,46 \times 10^{-5} \\ -3,57 \times 10^{-5} & 4,41 \times 10^{-4} & -4,20 \times 10^{-5} & -3,99 \times 10^{-5} \\ -6,80 \times 10^{-5} & -4,20 \times 10^{-5} & 4,00 \times 10^{-4} & 3,80 \times 10^{-5} \\ 6,46 \times 10^{-5} & -3,99 \times 10^{-5} & 3,80 \times 10^{-5} & 3,61 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (1-28)$$

Za izračun polos standardne elipse pogreškov bomo uporabili sledeči enačbi:

$$\begin{aligned} a = \sqrt{\lambda_1} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 &= \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \\ b = \sqrt{\lambda_2} \quad \rightarrow \quad \lambda_2 &= \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \end{aligned} \quad (1-29)$$

medtem ko bomo za matematični kot zasuka velike polosi glede na absciso uporabili:

$$\theta = \frac{\text{atan2}(2\sigma_{yx}, \sigma_y^2 - \sigma_x^2)}{2} \quad (1-30)$$

V enačbah (1–29) in (1–30) so parametri σ_y , σ_x in σ_{yx} generični, torej jih bomo v nadaljevanju ustrezno nadomestili.

Za izračun parametrov absolutne elipse pogreškov na točki A iz kovariančne matrike Σ_{AB} v enačbi (1–28) uporabimo kovariančno matriko Σ_A točke A , ki predstavlja pod-matriko matrike Σ_{AB} , kjer vzamemo le prvi dve vrstici in prva dva stolpca. Uporabimo enačbi (1–29) in (1–30) za podatke natančnosti točke A , in dobimo:

- Standardna elipsa pogreškov: $k = 1$, $a = 2,12$ cm, $b = 1,68$ cm in $\theta = -77^\circ 25' 12,00''$
- 95% elipsa pogreškov: $k = 2.448$, $a = 5,18$ cm, $b = 4,10$ cm in $\theta = -77^\circ 25' 12,00''$
- 99% elipsa pogreškov: $k = 3.035$, $a = 6,43$ cm, $b = 5,09$ cm in $\theta = -77^\circ 25' 12,00''$

Za izračun parametrov absolutne elipse pogreškov na točki B pa iz matrike Σ_{AB} vzamemo zadnji dve vrstici in zadnja dva stolpca in dobimo:

- Standardna elipsa pogreškov: $k = 1$, $a = 2,06$ cm, $b = 1,84$ cm in $\theta = 31^\circ 25' 12,00''$
- 95% elipsa pogreškov: $k = 2.447$, $a = 5,03$ cm, $b = 4,50$ cm in $\theta = 31^\circ 25' 12,00''$
- 99% elipsa pogreškov: $k = 3.035$, $a = 6,24$ cm, $b = 5,58$ cm in $\theta = 31^\circ 25' 12,00''$

Kovariančno matriko $\Sigma_{\overline{AB}}$ vektorja $\overline{AB}$ dobimo po enačbah (1–15), (1–16) in (1–17), ki so prikazane v poglavju 1.5:

$$\Sigma_{\overline{AB}} = \mathbf{J} \Sigma_{AB} \mathbf{J}^T \quad \rightarrow \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

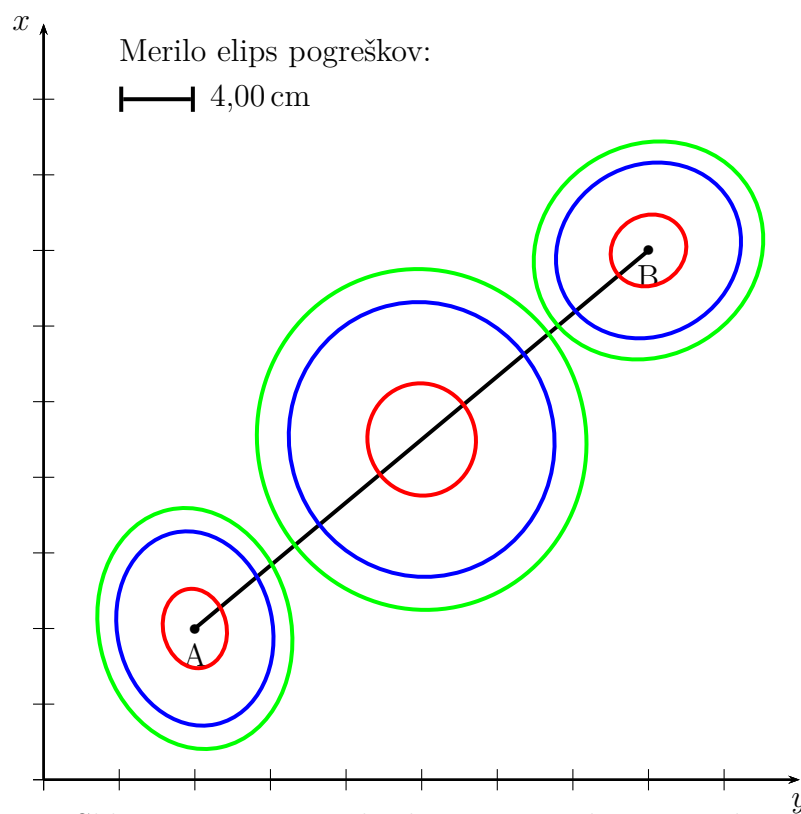
Kovariančna matrika iz enačbe (1–31) ima vrednosti:

$$\Sigma_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta y}^2 & \sigma_{\Delta y \Delta x} \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} & \sigma_{\Delta x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,250 \times 10^{-4} & -2,030 \times 10^{-5} \\ -2,030 \times 10^{-5} & 8,818 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-32)$$

V enačbi (1–32) sta $\Delta y = y_B - y_A$ in $\Delta x = x_B - x_A$ in predstavljata enačbi za funkcijsko povezavo, iz katerih dobimo jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ iz enačbe (1–31). Parametre relativne elipse pogreškov vektorja $\overline{AB}$ so:

- Standardna elipsa pogreškov: $k = 1$, $a = 2,98$ cm, $b = 2,86$ cm in $\theta = -72^\circ 13' 12,00''$
- 95% elipsa pogreškov: $k = 2.448$, $a = 7,29$ cm, $b = 7,00$ cm in $\theta = -72^\circ 13' 12,00''$
- 99% elipsa pogreškov: $k = 3.035$, $a = 9,05$ cm, $b = 8,68$ cm in $\theta = -72^\circ 13' 12,00''$

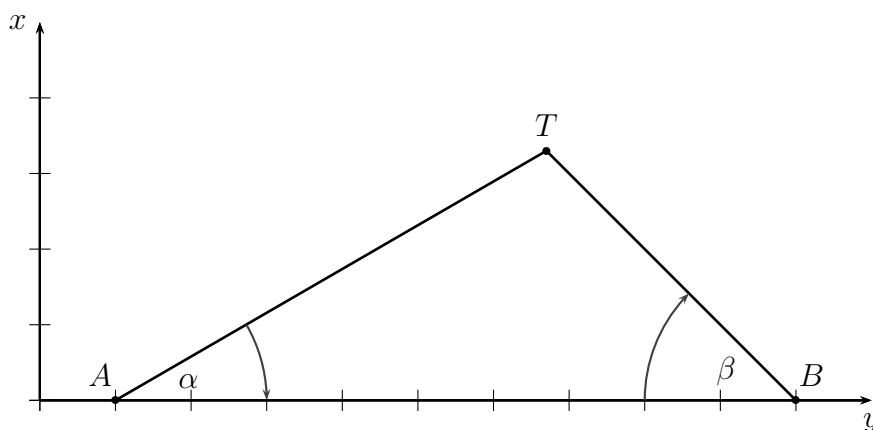
Na koncu še izrišimo celotno situacijo, položaje točk, vektor med točkami in vse elipse pogreškov, kar prikazuje slika 1–10. Rdeče so standardne elipse pogreškov, modre so 95% elipse pogreškov in zelene 99% elipse pogreškov.



Slika 1–10: Izris geodetske mreže in elips pogreškov

1.8 Primer 3 – zunanji urez

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10,00 \text{ m}, 0,00 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100,00 \text{ m}, 0,00 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva kota, in sicer $\alpha = 30^\circ$ in $\beta = 45^\circ$, oba z natančnostjo ($\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1'$), kot to prikazuje slika 1–11. Izračunajte koordinate točke T , kovariančno matriko Σ_T položaja točke T , natančnosti obeh koordinat σ_{y_T} , σ_{x_T} in njuno korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Izračunajte parametre absolutne elipse pogreškov a , b in θ na točki T in jo tudi izrišite.



Slika 1–11: Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat nove točke

Naloga predstavlja enega izmed primerov enolične določitve koordinat točke, to je zunanji urez, kje pa imamo podrobno rešitev podano v okviru poglavja *Zakon o prenosu pravih pogreškov* lanskega leta in tudi v okviru poglavja *Zakon o prenosu varianc in kovarianc* tega leta. Tu so zato podani samo rezultati, brez enačb, rešitev pa sledi postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc.

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Število opazovanj je $n = 2$ in vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,52360 \\ 0,78540 \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

Kovariančna matrika Σ_{xx} ima obliko:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 8,462 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 8,462 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.

Zanimajo nas koordinate točke T , torej je $m = 2$, vektor neznank $\mathbf{y}$ pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.

Izračun koordinat točke T :

$$\begin{aligned} y_T &= 67,058 \text{ m} \\ x_T &= 32,942 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-36)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.

Jakobijeva matrika $\mathbf{J}$ je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -48,23085 & 41,76915 \\ 48,23085 & 24,11543 \end{bmatrix} \quad (1-37)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Kovariančna matrika Σ_{yy} , ki predstavlja kovariančno matriko točke T , je enaka:

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} 3,445 \times 10^{-4} & -1,116 \times 10^{-4} \\ -1,116 \times 10^{-4} & 2,460 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-38)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

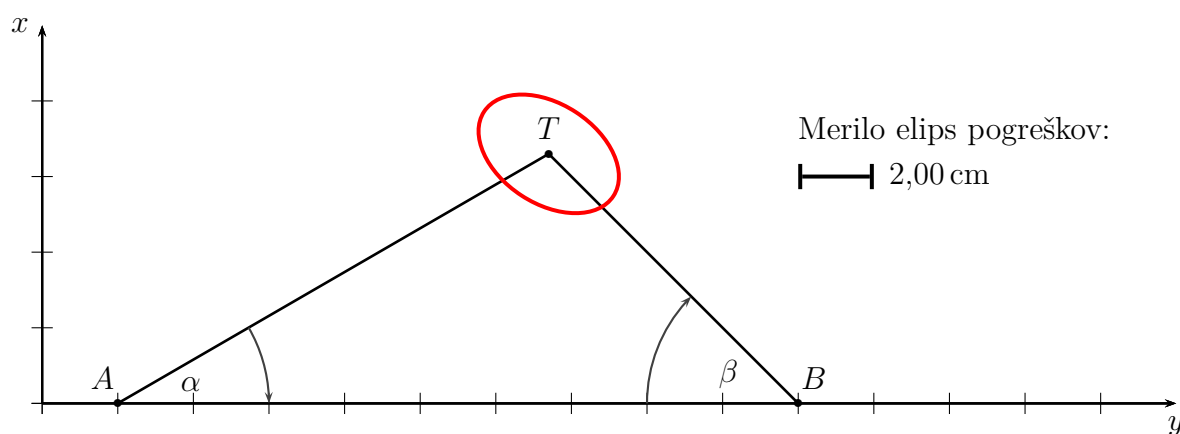
Prvo izračunamo natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$:

$$\sigma_{y_T} = 1,86 \text{ cm} \quad \sigma_{x_T} = 1,57 \text{ cm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0,38 \quad (1-39)$$

Po postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na točki T :

$$a = 2,04 \text{ cm} \quad b = 1,32 \text{ cm} \quad \theta = -33,10^\circ \quad (1-40)$$

Izrišimo še elipse pogreškov na točki T .

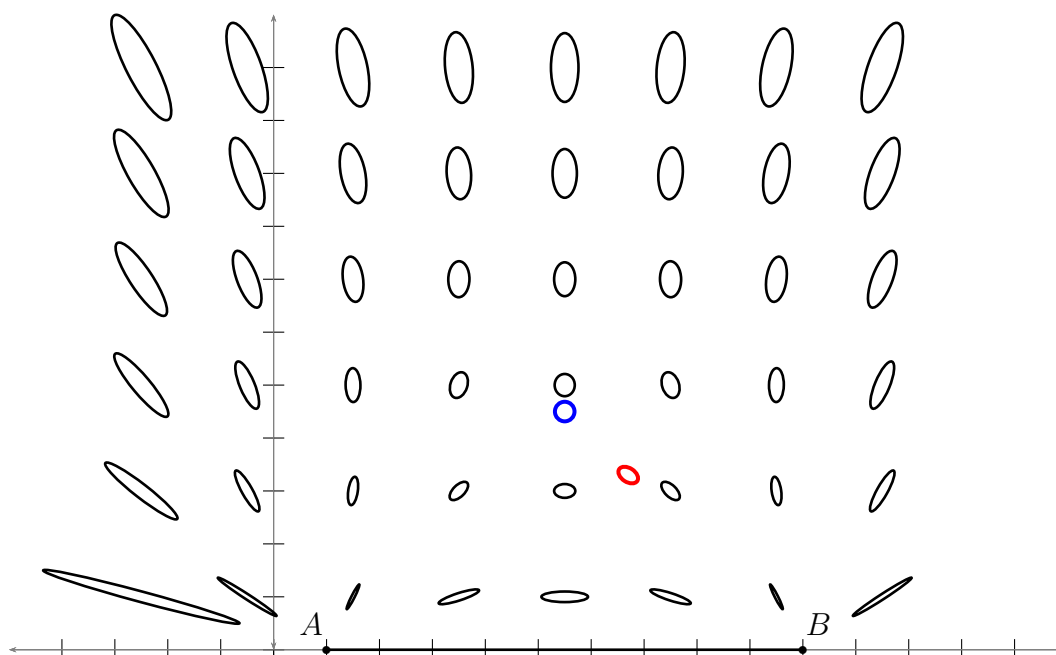


Slika 1–12: Izris elips pogreškov na novi točki

Na koncu pa nas zanima še, kakšne so elipse pogreškov v odvisnosti od različnih položajev točke T . To prikazuje slika 1–13. Na sliki so prikazane:

- elipsa pogreškov točke T s slike 1–12 – **izrisana z rdečo barvi**,
- elipse pogreškov za različne položaje točke T – izrisane s črno barvo in
- elipsa pogreškov položaja točke T , ki je rezultat optimalnega preseka kotov α in β – **izrisana z modro barvo**.

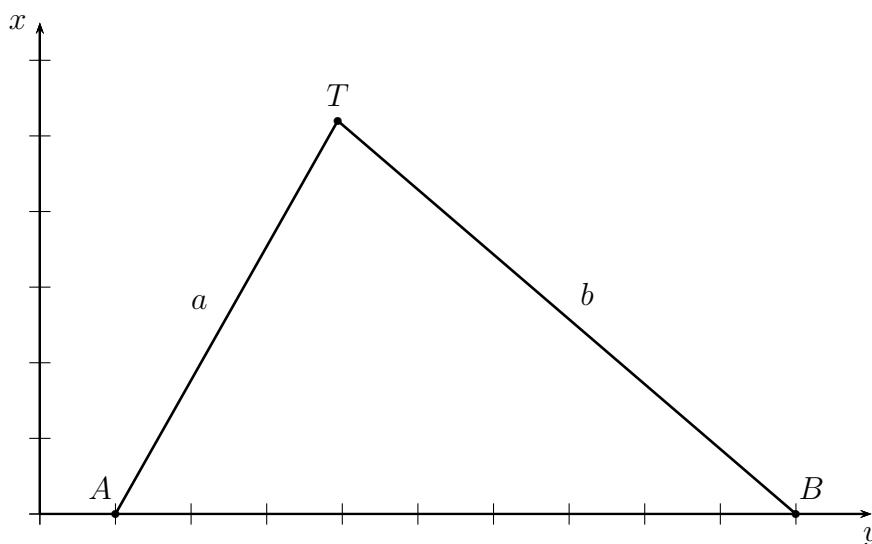
Iz slike se lepo vidi, kako se oblikujejo elipse pogreškov, pri različni geometriji točk A , B in T . Elipse pogreškov so zelo različnih velikosti in oblike. Od krožnice (modra elipsa) do zelo sploščenih elips in od malih do zelo velikih. Ugodna situacija je, ko imamo majhne in krožne elipse pogreškov, v tem primeru govorimo o dobrem preseku, ki nam zagotovi homogeno natančnost položaja točke T . Homogena natančnost položaja je dosežena takrat, ko sta obe komponenti primerljive (enake) natančnosti in ko ni korelacije med njima. Takrat bo elipsa pogreškov oblike krožnice. Izraz homogenost se nanaša na to, da je natančnost položaja točke neodvisna od smernega kota. To si lahko predstavljamo tako, da presekamo elipso s premico, ki gre skozi točko T in je usmerjena pod različnimi smernimi koti. Če sta obe točki presečišča enako oddaljeni, ne glede na vrednost smernega kota, govorimo o homogeni natančnosti.



Slika 1-13: Izris elips pogreškov za različne položaje nove točke

1.9 Primer 4 – ločni presek

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10,00 \text{ m}, 0,00 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100,00 \text{ m}, 0,00 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dve stranici, in sicer $a = 60,00 \text{ m}$ in $b = 80,00 \text{ m}$, obe z natančnostjo ($\sigma_a = \sigma_b = 1,00 \text{ cm}$), kot to prikazuje slika 1-14. Izračunajte koordinate točke T , kovariančno matriko Σ_T položaja točke T , natančnosti obeh koordinat σ_{y_T} , σ_{x_T} in njuno korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Izračunajte parametre absolutne elipse pogreškov a , b in θ na točki T in jo tudi izrišite.



Slika 1-14: Opazovanja ločnega preseka za določitev koordinat nove točke

Vidimo, da naloga predstavlja izračun koordinat nove točke T na osnovi ločnega preseka, kar je bila tudi *Domača naloga 3*, a tam podana v malo drugačni obliki. Rešitev naloge sledi postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc.

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Število opazovanj je $n = 2$ in vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,00 \text{ m} \\ 80,00 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

Kovariančna matrika Σ_{xx} ima obliko:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 1,000 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 1,000 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-42)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.

Zanimajo nas koordinate točke T , torej je $m = 2$, vektor neznank $\mathbf{y}$ pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad (1-43)$$

Rešitev pa je podana takole:

- izračun dane dolžine D med točkama A in B :

$$D = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = 90,000 \text{ m} \quad (1-44)$$

- izračun kota α na točki A po kosinusnem izreku:

$$\alpha = \arccos \frac{a^2 + D^2 - b^2}{2aD} = 60^\circ 36' 39'' \quad (1-45)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.

Izračun koordinat točke T :

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + a \cos \alpha = 39,444 \text{ m} \\ x_T &= x_A + a \sin \alpha = 52,278 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-46)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.

Parcialne odvode dobimo takole:

- prvo odvajamo α iz enačbe (1-45) po a in po b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial a} &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \frac{2a(2aD) - (a^2 + D^2 - b^2)2D}{(2aD)^2} = -3,365 \times 10^{-3} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial b} &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \frac{-b}{(aD)} = 1,700 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (1-47)$$

- odvoda obeh neznank (y_T in x_T) po obeh opazovanjih (a in b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial a} &= \cos \alpha - a \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial a} = 6,667 \times 10^{-1} & \frac{\partial y_T}{\partial b} &= -a \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial b} = -8,889 \times 10^{-1} \\ \frac{\partial x_T}{\partial a} &= \sin \alpha + a \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial a} = 7,722 \times 10^{-1} & \frac{\partial x_T}{\partial b} &= a \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial b} = 5,006 \times 10^{-1} \end{aligned} \quad (1-48)$$

Jakobijeva matrika $\mathbf{J}$ je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6,667 \times 10^{-1} & -8,889 \times 10^{-1} \\ 7,722 \times 10^{-1} & 5,006 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (1-49)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Kovariančna matrika Σ_{yy} , ki predstavlja kovariančno matriko točke T , je enaka:

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} 1,235 \times 10^{-4} & 6,980 \times 10^{-6} \\ 6,980 \times 10^{-6} & 8,470 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \text{m}^2 \quad (1-50)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

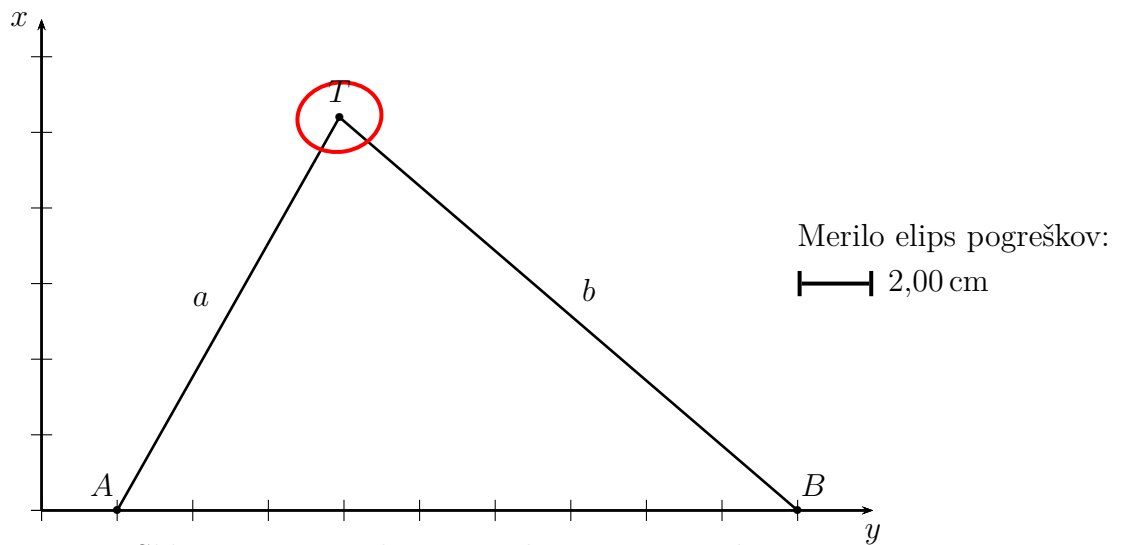
Prvo izračunamo natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$:

$$\sigma_{y_T} = 1,11 \text{ cm} \quad \sigma_{x_T} = 0,92 \text{ cm} \quad \rho_{y_T x_T} = 0,07 \quad (1-51)$$

Po postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc izračunajmo še parametre standardne absolutne elipse pogreškov na točki T :

$$a = 1,12 \text{ cm} \quad b = 0,91 \text{ cm} \quad \theta = 9,903141274473^\circ \quad (1-52)$$

Izrišimo še elipse pogreškov na točki T .

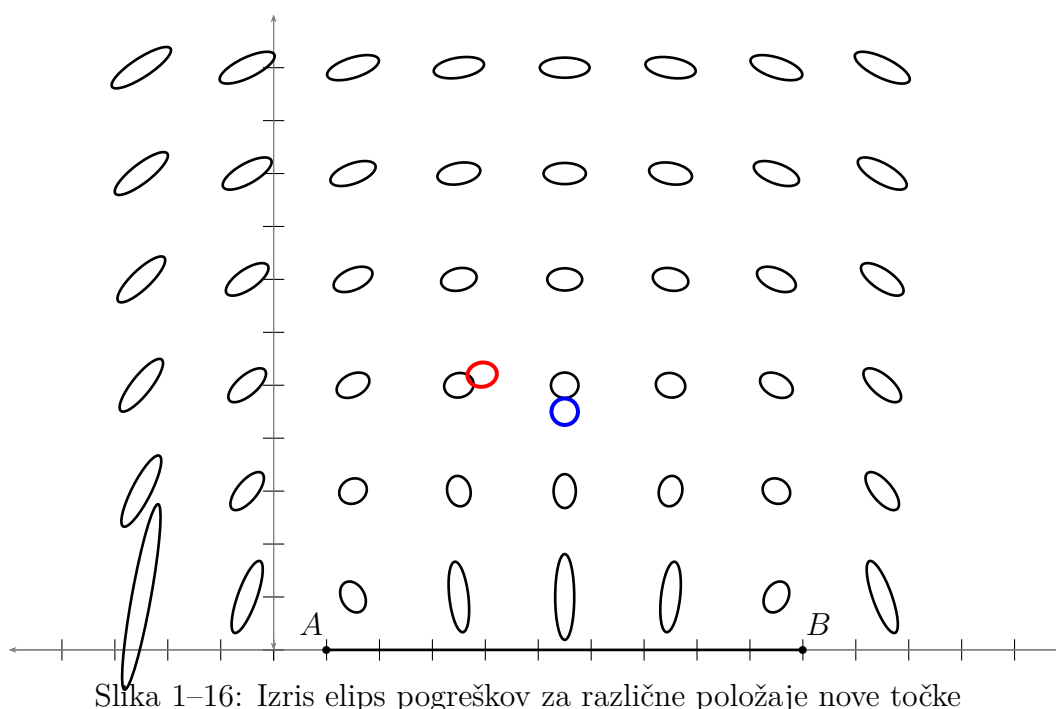


Slika 1–15: Izris elips pogreškov na novi točki

Tako kot pri zunanjem vrezu nas na koncu nas zanima, kakšne so elipse pogreškov v odvisnosti od različnih položajev točke T . To prikazuje slika 1–16. Na sliki so prikazane:

- elipsa pogreškov točke T s slike 1–15 – izrisana z rdečo barvi,
- elipse pogreškov za različne položaje točke T – izrisane s črno barvo in
- elipsa pogreškov položaja točke T , ki je rezultat optimalnega preseka stranic a in b – izrisana z modro barvo.

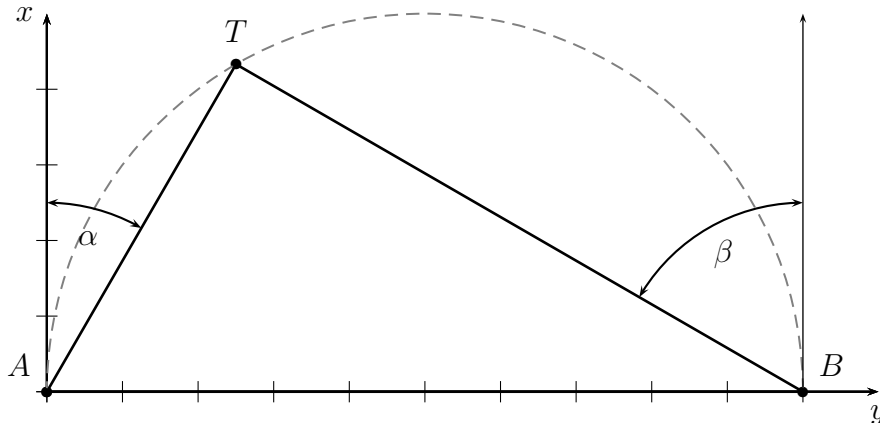
Tudi pri ločnem preseku lahko vidimo, kako različna geometriji točk A , B in T vpliva na velikost, obliko in orientacijo elips pogreškov. Obstaja samo en položaj, kjer je elipsa krožnica (modra elipsa), ki pa se seveda ponovi na drugi strani zveznice AB .



Slika 1–16: Izris elips pogreškov za različne položaje nove točke

1.10 Primer 5 – položaj točke na krožnici

Z danih točk $A(y_A, x_A) = (0,00 \text{ m}, 0,00 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100,00 \text{ m}, 0,00 \text{ m})$ smo neodvisno in z različno natančnostjo opazovali kota $\alpha = 30^\circ 1'$ ($\sigma_\alpha = 15,00''$) in $\beta = 60^\circ 1'$ ($\sigma_\beta = 30,00''$) do točke T . Točka T leži na krožnici, katere diametralni točki sta točki A in B . S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T . Določite kovariančno matriko Σ_T , natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} točke T ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Za izračun uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2 . Izračunajte parametre absolutne elipse pogreškov a , b in θ na točki T in jo tudi izrišite.



Slika 1–17: Opazovanja za določitev koordinat točke na krožnici

Da pridemo do vseh rešitev naloge, moramo prvo izravnati opazovanja, nato izračunati neznanke, z zakonom o prenosu varianc in kovarianc izračunati statistične lastnosti neznank in v zadnjem koraku izračunati parametre elipse pogreškov.

1.10.1 Izravnavo opazovanj po MNK

V nalogi je navodilo, da je potrebno opazovanja izravnati z obema modeloma izravnave, to sta posredna in pogojna izravnavo. Postopka ne bomo prikazali, le nastavek in končne rezultate. Ne glede na vrsto izravnave, imamo osnovni pogoj, ki mu morata obe izravnani opazovanji $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$ zadoščati:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ \quad (1-53)$$

Do enačbe 1–53 pridemo, ko ugotovimo, da je trikotnik $\triangle ABT$ pravokotni trikotnik. To izhaja iz osnovnih pravil pravokotnega trikotnika, saj središče očrtanega kroga pravokotnega trikotnika leži ravno na sredini hipotenuze (stranica AB). Enačbo 1–53 uporabimo za pogojno enačbo pogojne izravnave ali v enačbah popravkov pri posredni izravnavi. Tam moramo izbrati tudi neznanke. Imamo dve opazovanji (α in β), kjer bi nujno potrebovali le eno, zato imamo eno nadštevilno opazovanje. Rezultat izravnave sta izravnana kota z natančnostmi:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 30^\circ 0' 36'' & \sigma_{\hat{\alpha}} &= 13'' \\ \hat{\beta} &= 59^\circ 59' 24'' & \sigma_{\hat{\beta}} &= 13'' \end{aligned} \quad (1-54)$$

Iz oblike enačbe (1–53) lahko tudi sklepamo o korelaciji med obema izravnanim opazovanjema, velja $\rho_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -1,0$.

1.10.2 Izračun koordinat točke in pripadajoče kovariančne matrike s prenosom varianc in kovarianc

Koordinate y_T in x_T dobimo, če prvo izračunamo stranico a med točko A in točko T , na osnovi npr. izravnane kota $\hat{\alpha}$ in hipotenuze trikotnika (razdalja $D = \overline{AB}$). Nato pa izračunamo:

$$\begin{aligned} y_T &= a \sin \hat{\alpha} = D \sin^2 \hat{\alpha} = 25,015 \text{ m} \\ x_T &= a \cos \hat{\alpha} = \frac{D}{2} \sin 2\hat{\alpha} = 43,310 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-55)$$

Natančnosti obeh koordinat in njuna korelacija pa so:

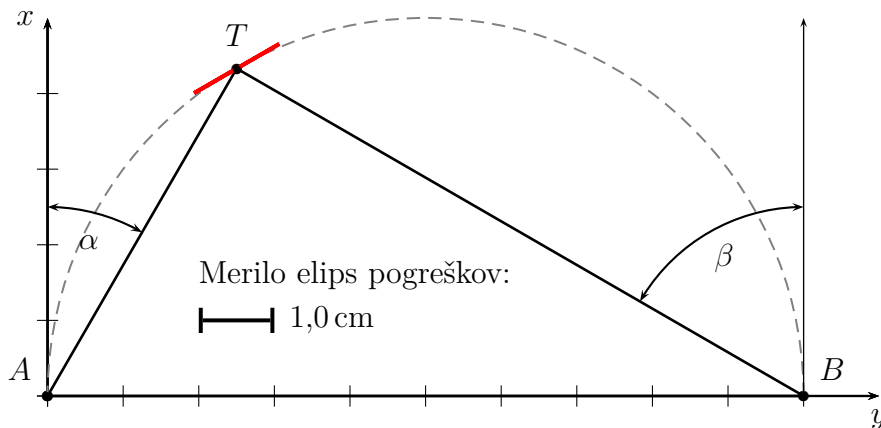
$$\sigma_{y_T} = 5,6 \text{ mm} \quad \sigma_{x_T} = 3,3 \text{ mm} \quad \rho_{y_T x_T} = 1,0 \quad (1-56)$$

1.10.3 Izračun parametrov elipse pogreškov in njen izris

Na osnovi izračunane kovariančne matrike Σ_T točke T iz prejšnjega podpoglavja, izračunamo vse tri parametre elipse pogreškov:

$$a = 6,5 \text{ mm} \quad b = 0,0 \text{ mm} \quad \theta = 30,0^\circ \quad (1-57)$$

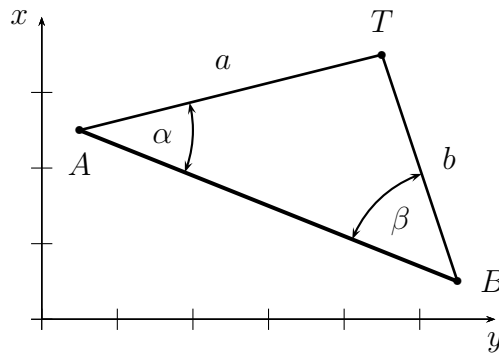
Ali je oblika elipse pogreškov iz enačbe (1-57) presenečenje? Zakaj za polos b dobimo takšno vrednost? Odgovor je na sliki 1-18. Vidimo, da mora točka T ležati na krožnici, zato se lahko “premika” le po krožnici, torej na nekem majhnem delu krožnice le po premici, ki je ravno tangenta skozi točko. Zato je elipsa pogreškov sploščena do daljice.



Slika 1-18: Izris elipse pogreškov nove točke na krožnici

1.11 Primer 6 – ravninska geodetska mreža

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (5,0\text{ m}, 10,0\text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (20,0\text{ m}, 0,0\text{ m})$. Da bi določili položaj točke T , smo s točke A opazovali dolžino $a = 16,2\text{ m}$ ($\sigma_a = 0,1\text{ m}$) in kot $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13,2\text{ m}$ ($\sigma_b = 0,1\text{ m}$) in kot $\beta = 60^\circ$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1–19. S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T, x_T)$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2 . Izračunajte parametre absolutne in 95% elipse pogreškov a , b in θ na točki T in ju tudi izrišite.



Slika 1–19: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja nove točke

Ker smo to nalogo rešili tako v okviru poglavja *Pogojna izravnavo po MNK* lanskega leta, kot tudi pri poglavju *Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri MNK* letošnjega leta, bomo tu nalog rešili z drugačnim nizom pogojnih enačb, predstavljeni pa bodo bolj kot ne samo rezultati.

1.11.1 Izravnavo opazovanj po MNK

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.

Sestavimo $r = 2$ pogojnih enačb, tu bomo uporabili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} \sin \hat{\alpha} - \hat{b} \sin \hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a} \cos \hat{\alpha} + \hat{b} \cos \hat{\beta} - D = 0 \end{aligned} \quad (1-58)$$

V drugi pogojni enačbi iz enačbe (1–58) količina D predstavlja dolžino med danima točkama A in B . Če nastavimo vektor opazovanj kot $\mathbf{l} = [a \ \alpha \ b \ \beta]^T$, potem pogojni enačbi (1–58) lahko zapišemo v osnovni matrični obliki pogojne izravnave izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$:

$$\begin{bmatrix} 0,707 & 11,455 & -0,866 & -6,600 \\ 0,707 & -11,455 & 0,500 & -11,432 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,024\text{ m} \\ -0,027\text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-59)$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.

Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana. Sestavimo kovariančno matriko Σ , za referenčno varianco si izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$ in dobimo kofaktorje opazovanj enake:

$$q_a = 131,31 \quad q_\alpha = 1,00 \quad q_b = 131,31 \quad q_\beta = 1,00 \quad (1-60)$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.

Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljata vektorja popravkov opazovanj in vektor izravnanih opazovanj:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,0156 \text{ m} \\ 0,0000570 \\ 0,0036 \text{ m} \\ 0,0015286 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 16,1844 \text{ m} \\ 0,7854552 \\ 13,2036 \text{ m} \\ 1,0487262 \end{bmatrix} \quad (1-61)$$

V enačbi (1-61) sta tako popravka v_α in v_β , kot tudi izravana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$, podana v radianih. Popravka lahko zapišemo tudi kot $v_\alpha = 0'11,8''$, $v_\beta = 5'15,3''$, izravnan kota pa kot $\hat{\alpha} = 45^\circ 0'11,8''$ in $\hat{\beta} = 60^\circ 5'15,3''$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.

Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\tilde{ll}}$, kjer dobimo:

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 57,023 & 0,190 & -16,249 & -5,497 \\ 0,190 & 0,662 & -5,235 & 0,121 \\ -16,249 & -5,235 & 45,192 & 0,474 \\ -5,497 & 0,121 & 0,474 & 0,559 \end{bmatrix} \quad (1-62)$$

$$\mathbf{Q}_{\tilde{ll}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 74,289 & -0,190 & 16,249 & 5,497 \\ -0,190 & 0,338 & 5,235 & -0,121 \\ 16,249 & 5,235 & 86,120 & -0,474 \\ 5,497 & -0,121 & -0,474 & 0,441 \end{bmatrix}$$

Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 2,1481 \times 10^{-6} \quad (1-63)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,0015$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.

Za izračun kovariančnih matrik Σ_{vv} in $\Sigma_{\tilde{ll}}$ bomo uporabili referenčno varianco σ_0^2 , kjer dobimo:

$$\Sigma_{vv} = \begin{bmatrix} 4,343 \times 10^{-3} & 1,450 \times 10^{-5} & -1,237 \times 10^{-3} & -4,186 \times 10^{-4} \\ 1,450 \times 10^{-5} & 5,044 \times 10^{-5} & -3,987 \times 10^{-4} & 9,229 \times 10^{-6} \\ -1,237 \times 10^{-3} & -3,987 \times 10^{-4} & 3,442 \times 10^{-3} & 3,608 \times 10^{-5} \\ -4,186 \times 10^{-4} & 9,229 \times 10^{-6} & 3,608 \times 10^{-5} & 4,259 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (1-64)$$

$$\Sigma_{\tilde{ll}} = \begin{bmatrix} 5,657 \times 10^{-3} & -1,450 \times 10^{-5} & 1,237 \times 10^{-3} & 4,186 \times 10^{-4} \\ -1,450 \times 10^{-5} & 2,572 \times 10^{-5} & 3,987 \times 10^{-4} & -9,229 \times 10^{-6} \\ 1,237 \times 10^{-3} & 3,987 \times 10^{-4} & 6,558 \times 10^{-3} & -3,608 \times 10^{-5} \\ 4,186 \times 10^{-4} & -9,229 \times 10^{-6} & -3,608 \times 10^{-5} & 3,356 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.

Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe (1-64), korelacije pa dobimo iz izven-diagonalnih elementov matrik. Ker nas primarno zanimajo izravnana opazovanja, izračunajmo natančnosti le-teh:

$$\sigma_{\hat{a}} = 7,5 \text{ cm} \quad \sigma_{\hat{\alpha}} = 17'26'' \quad \sigma_{\hat{b}} = 8,1 \text{ cm} \quad \sigma_{\hat{\beta}} = 19'55'' \quad (1-65)$$

Korelacije med izravnanimi opazovanji izpišimo v obliki preglednice:

	$\hat{a}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{b}$	$\hat{\beta}$
$\hat{a}$	1,00			
$\hat{\alpha}$	-0,04	1,00		
$\hat{b}$	0,20	0,97	1,00	
$\hat{\beta}$	0,96	-0,31	-0,08	1,00

1.11.2 Izračun položaja točke in pripadajoče kovariančne matrike

Rezultat pogojne izravnave v zgornjem postopku sta vektor izravnanih opazovanj $\hat{l}$ iz enačbe (1-61) in njegova variančno-kovariančna matrika $\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe (1-64). Izravnana opazovanja in koordinate danih točk (A in B) uporabimo za izračun koordinat točke T , in sicer:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + \hat{a} \sin(\nu_A^B - \hat{\alpha}) = 20,870 \text{ m} \\ x_T &= x_A + \hat{a} \cos(\nu_A^B - \hat{\alpha}) = 13,175 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-66)$$

Natančnosti koordinat in pripadajočo korelacijo dobimo preko zakona o prenosu varianc in kovarianc. Tudi v tem primeru izhajamo iz vektorja izravnanih opazovanj $\hat{l}$ in kovariančne matrike $\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}$, funkcijska povezava pa je določena v enačbi (1-66). Končna kovariančna matrika Σ_T položaja točke T je:

$$\Sigma_T = \begin{bmatrix} \sigma_{y_T}^2 & \sigma_{y_T x_T} \\ \sigma_{y_T x_T} & \sigma_{x_T}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,789 \times 10^{-3} & -4,240 \times 10^{-4} \\ -4,240 \times 10^{-4} & 6,604 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (1-67)$$

Natančnosti koordinat in korelacija med koordinatama točke T pa so:

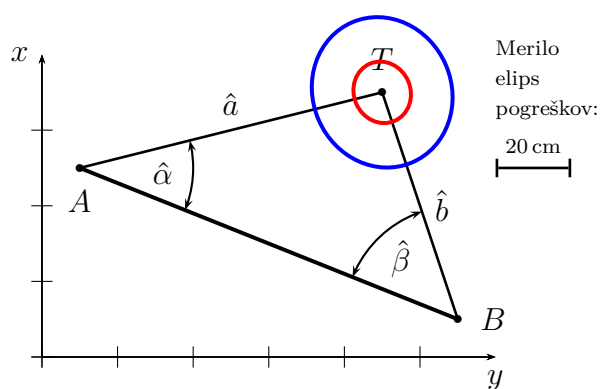
$$\sigma_{y_T} = 7,61 \text{ cm} \quad \sigma_{x_T} = 8,13 \text{ cm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0,07 \quad (1-68)$$

1.11.3 Izračun parametrov elipse pogreškov in njen izris

Za izračun parametrov elipse pogreškov izhajamo iz kovariančne matrike Σ_T iz enačbe (1-67), dobimo pa vse parametre elipse pogreškov:

$$\begin{aligned} a &= 8,24 \text{ cm} & b &= 7,49 \text{ cm} & \theta &= -66,93^\circ \\ a_{95\%} &= 20,16 \text{ cm} & b_{95\%} &= 18,33 \text{ cm} \end{aligned} \quad (1-69)$$

Geodetsko mrežo in elipsi pogreškov še izrišimo:



Slika 1–20: Standardna in 95% elipsa pogreškov položaja nove točke