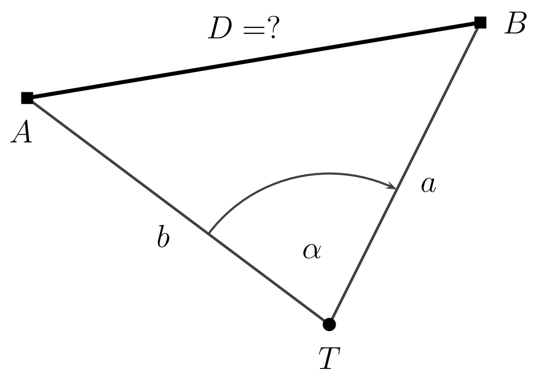
Potrebna natančnost geodetskih opazovanj – Izračun dolžine D

Dolžino D med točkama A in B želimo določiti z natančnostjo $\sigma_D = 1.0\,\mathrm{cm}$. A ker je med točkama ovira, dolžine neposredno ne moremo izmeriti, zato smo stabilizirali začasno točko T, na kateri bomo izmerili dve stranici (a in b) in en kot (α). Situacijo prikazuje slika 1. Izračunaj:

- Kako natančno moramo izmeriti opazovanja a, b in α, da zadostimo pogoju natančnosti stranice D?
- Če imamo na razpolago teodolit, ki izmeri kote z natančnostjo $\sigma_i = 45''$, kako natančno moramo sedaj izmeriti stranici a in b, da zadostimo pogoju natančnosti stranice D?
- Kolikokrat bi morali s podanim teodolitom izmeriti kot α, da lahko zagotovimo natančnost dobljeno v 1. alineji?

Približne vrednosti opazovanj so $a = 40.00\,\mathrm{m}$, $b = 60.00\,\mathrm{m}$ in $\alpha = 45°$.



Slika 1: Prikaz meritev za določitev dolžine D

Določitev potrebnih natančnosti opazovanj vseh treh opazovanj (alineja 1)

V nalogi imamo podano eno neznanko (stranico D), ki pa se izračuna na osnovi $n =$ ___ opazovanj, in sicer dveh stranic a in b ter vmesnega kota α. Za izračun dolžine D uporabimo kosinusni izrek in dobimo:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = \_\_\mathrm{m} \tag{1}$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca σ_D^2 dolžine D določena kot:

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 \tag{2}$$

kjer so parcialni odvodi iz enačbe 2 izpeljani na osnovi enačbe 1 in imajo vrednosti:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \underline{\hspace{2em}} \qquad \frac{\partial D}{\partial b} = \underline{\hspace{2em}} \qquad \frac{\partial D}{\partial \alpha} = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{m} \tag{3}$$

Potrebne natančnosti vseh treh opazovanj σ_a, σ_b in σ_α dobimo kot:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_D}{\left|\frac{\partial D}{\partial a}\right|\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{cm} \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_D}{\left|\frac{\partial D}{\partial b}\right|\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{cm} \qquad \sigma_\alpha = \frac{\sigma_D}{\left|\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right|\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2em}}\,'' \tag{4}$$

Rezultate, ki smo jih dobili v enačbi 4 lahko preverimo tako, da jih vnesemo v enačbo 2. Dobimo:

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{m}^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_D = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{cm} \tag{5}$$

Iz rezultata enačbe 5 vidimo, da so izračunane natančnosti iz 4 mejne vrednosti, s katerimi bomo dobili željeno natančnost dolžine D. Če opazovanja izvedemo z višjo natančnostjo, bomo tudi D dobili z višjo natančnostjo.

Določitev potrebnih natančnosti dolžin a in b ob podani natančnosti kota α (alineja 2)

V tem primeru bomo privzeli $\sigma_\alpha = \sigma_i$, zato moramo izračunati natančnosti samo še ostalim $n = \underline{\hspace{1em}}$ opazovanjem. Ker poznamo natančnost σ_α kota α, potem enačbo 2 preuredimo v:

$$\underbrace{\sigma_D^2 - \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2}_{\tilde{\sigma}_D^2} = \left(\frac{\partial D}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \tag{6}$$

In izračunamo varianco $\tilde{\sigma}_D^2$ in standardni odklon $\tilde{\sigma}_D$:

$$\tilde{\sigma}_D^2 = \sigma_D^2 - \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{m}^2 \quad \rightarrow \quad \tilde{\sigma}_D = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{cm} \tag{7}$$

Potrebne natančnosti obeh opazovanj σ_a in σ_b sedaj dobimo kot:

$$\sigma_a = \frac{\tilde{\sigma}_D}{\left|\frac{\partial D}{\partial a}\right|\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{cm} \qquad \sigma_b = \frac{\tilde{\sigma}_D}{\left|\frac{\partial D}{\partial b}\right|\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2em}}\,\mathrm{cm} \tag{8}$$

Kolikokrat moramo izmeriti kot α (alineja 3)

Izračunana natančnost izmerjenega kota σ_α iz alineje 1 je enaka $\sigma_\alpha = \underline{\hspace{2em}}''$. Če imamo teodolit, ki izmeri kote z natančnostjo $\sigma_i = 45''$, potem je število n_α, kolikokrat moramo izmerjeniti kot α, enako:

$$n_\alpha = \left\lceil \frac{\sigma_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right\rceil = \underline{\hspace{2em}} \tag{9}$$

V enačbi 9 operator $\lceil \cdot \rceil$ predstavlja zaokrožitev navzgor na prvo naravno število.