

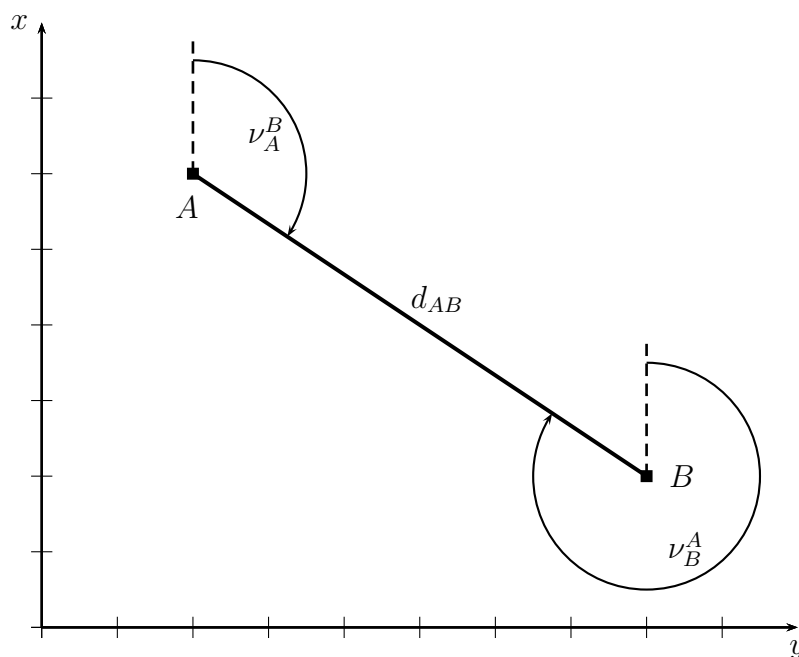
## Potrebna natančnost geodetskih opazovanj – Geodetski polarni in kartezični koordinatni sistem:

Med dvema točkama,  $A$  in  $B$ , v državnem koordinatnem sistemu želimo določiti vse elemente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, in sicer dolžino  $d_{AB}$  in oba smerna kota  $\nu_A^B$  ter  $\nu_B^A$ . Izračunaj, s kakšno natančnostjo moramo imeti podane koordinate obeh točk, to so  $\sigma_{y_A}$ ,  $\sigma_{x_A}$ ,  $\sigma_{y_B}$  in  $\sigma_{x_B}$ , če želimo določiti:

- dolžino  $d_{AB}$  z natančnostjo  $\sigma_{d_{AB}} = 1.0$  cm,
- smerni kot  $\nu_A^B$  z natančnostjo  $\sigma_{\nu_A^B} = 10.0''$  in
- smerni kot  $\nu_B^A$  z natančnostjo  $\sigma_{\nu_B^A} = 10.0''$ .

Približne koordinate obeh točk so:  $A(y_A, x_A) = (461\,300.0\text{ m}, 100\,600.0\text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (461\,500.0\text{ m}, 100\,500.0\text{ m})$ .

Kako bi lahko določili splošne natančnosti koordinat dveh točk, pri podanih pogojih natančnosti  $\sigma_{d_{AB}}$ ,  $\sigma_{\nu_A^B}$  in  $\sigma_{\nu_B^A}$ , če koordinat točk ne poznamo?



Slika 1: Skica obeh točk in elementov geodetskega polarnega koordinatnega sistema

### Določitev dolžine $d_{AB}$ z natančnostjo $\sigma_{d_{AB}} = 1.0$ cm

Iz navodil naloge vidimo, da moramo izračunati potrebne natančnosti  $n = \underline{\quad}$  opazovanj, in sicer natančnosti koordinat obeh točk, torej  $\sigma_{y_A}$ ,  $\sigma_{x_A}$ ,  $\sigma_{y_B}$  in  $\sigma_{x_B}$ . Prvo zapišimo, kako se izračuna dolžina  $d_{AB}$  in njeno vrednost, izračunano iz približnih koordinat:

$$d_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \underline{\quad} \text{ m} \quad (1)$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca  $\sigma_{d_{AB}}^2$  dolžine  $d_{AB}$  določena kot:

$$\sigma_{d_{AB}}^2 = \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} \right)^2 \sigma_{y_A}^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} \right)^2 \sigma_{x_A}^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} \right)^2 \sigma_{y_B}^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \right)^2 \sigma_{x_B}^2 \quad (2)$$

Parcialne odvode iz enačbe 2 dobimo na osnovi enačbe 1 in imajo vrednosti (izpeljite jih sami za vajo):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} \right) &= \text{---} & \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} \right) &= \text{---} \\ \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} \right) &= \text{---} & \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \right) &= \text{---} \end{aligned} \quad (3)$$

Potrebne natančnosti koordinat  $\sigma_{y_A}$ ,  $\sigma_{x_A}$ ,  $\sigma_{y_B}$  in  $\sigma_{x_B}$  dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A} &= \frac{\sigma_{d_{AB}}}{\left| \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} & \sigma_{x_A} &= \frac{\sigma_{d_{AB}}}{\left| \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} \\ \sigma_{y_B} &= \frac{\sigma_{d_{AB}}}{\left| \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} & \sigma_{x_B} &= \frac{\sigma_{d_{AB}}}{\left| \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} \end{aligned} \quad (4)$$

### Določitev smernega kota $\nu_A^B$ z natančnostjo $\sigma_{\nu_A^B} = 10.0''$

Tudi smerni kot  $\nu_A^B$  se izračuna iz  $n = \text{---}$  opazovanj, in sicer kot:

$$\nu_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{---}^\circ \text{---}' \text{---}'' \quad (5)$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca  $\sigma_{\nu_A^B}^2$  smernega kota  $\nu_A^B$  določena kot:

$$\sigma_{\nu_A^B}^2 = \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} \right)^2 \sigma_{y_A}^2 + \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} \right)^2 \sigma_{x_A}^2 + \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} \right)^2 \sigma_{y_B}^2 + \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \right)^2 \sigma_{x_B}^2 \quad (6)$$

Parcialne odvode iz enačbe 6 dobimo na osnovi enačbe 5 in imajo vrednosti (tudi te izpeljite sami za vajo):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} \right) &= \text{---} \text{ m}^{-1} & \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} \right) &= \text{---} \text{ m}^{-1} \\ \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} \right) &= \text{---} \text{ m}^{-1} & \left( \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \right) &= \text{---} \text{ m}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

Potrebne natančnosti koordinat  $\sigma_{y_A}$ ,  $\sigma_{x_A}$ ,  $\sigma_{y_B}$  in  $\sigma_{x_B}$  dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left| \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} & \sigma_{x_A} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left| \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} \\ \sigma_{y_B} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left| \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} & \sigma_{x_B} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left| \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \right| \sqrt{n}} = \text{---} \text{ cm} \end{aligned} \quad (8)$$

## Določitev smernega kota $\nu_B^A$ z natančnostjo $\sigma_{\nu_B^A} = 10.0''$

Smerni kot  $\nu_B^A$  predstavlja samo obratni smerni kot kota  $\nu_A^B$ , zato tu prikažemo samo rezultate. Velikost smernega kota  $\nu_B^A$  je:

$$\nu_B^A = \nu_A^B + 180^\circ = \arctan \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \underline{\quad}'' \quad (9)$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca  $\sigma_{\nu_B^A}^2$  smernega kota  $\nu_B^A$  določena kot:

$$\sigma_{\nu_B^A}^2 = \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} \right)^2 \sigma_{y_A}^2 + \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} \right)^2 \sigma_{x_A}^2 + \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} \right)^2 \sigma_{y_B}^2 + \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \right)^2 \sigma_{x_B}^2 \quad (10)$$

Parcialne odvode iz enačbe 10 dobimo na osnovi enačbe 9 in imajo vrednosti (tudi te izpeljite sami za vajo):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} \right) &= \underline{\quad} \text{m}^{-1} & \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} \right) &= \underline{\quad} \text{m}^{-1} \\ \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} \right) &= \underline{\quad} \text{m}^{-1} & \left( \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \right) &= \underline{\quad} \text{m}^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Potrebne natančnosti koordinat  $\sigma_{y_A}$ ,  $\sigma_{x_A}$ ,  $\sigma_{y_B}$  in  $\sigma_{x_B}$  dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left| \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} \right| \sqrt{n}} = \underline{\quad} \text{cm} & \sigma_{x_A} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left| \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} \right| \sqrt{n}} = \underline{\quad} \text{cm} \\ \sigma_{y_B} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left| \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} \right| \sqrt{n}} = \underline{\quad} \text{cm} & \sigma_{x_B} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left| \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \right| \sqrt{n}} = \underline{\quad} \text{cm} \end{aligned} \quad (12)$$

## Določitev natančnosti koordinat splošno

Rezultati ocenjenih potrebnih natančnosti koordinat pri določitvi dolžine  $d_{AB}$  in obeh smernih kotov  $\nu_A^B$  in  $\nu_B^A$  nakazujejo na razmislek. Vidimo, da pri vseh treh primerih dobimo isto potrebno natančnost za koordinati  $y_A$  in  $y_B$  in isti za  $x_A$  in  $x_B$ . Glede samih numeričnih vrednosti, pa bi bilo zanimivo videti, kako se le-te spreminjajo v odvisnosti od same geometrije problema, torej kako na potrebno natančnost koordinat vpliva razdalja med točkama in orientacija med točkama.

Obrnimo nalogo in s prenosom pravih pogreškov izračunajmo natančnost dolžine  $\sigma_{d_{AB}}$  in smernega kota  $\sigma_{\nu_B^A}$  pri tem, da imamo vse koordinate enake natančnosti, torej:

$$\sigma_{y_A} = \sigma_{x_A} = \sigma_{y_B} = \sigma_{x_B} = \sigma_k \quad (13)$$

Zakon o prenosu varianc in kovarianc za dolžino  $d_{AB}$  je zapisan v enačbi 2, ki ga skladno z enačbo 13 zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{d_{AB}}^2 &= \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} \right)^2 \sigma_{y_A}^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} \right)^2 \sigma_{x_A}^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} \right)^2 \sigma_{y_B}^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \right)^2 \sigma_{x_B}^2 \\ &= \sigma_k^2 \left( \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Glede na obliko parcialnih odvodov dolžine  $d_{AB}$  po vseh koordinatah (preverite sami), se enačba 14 poenostavi v:

$$\sigma_{d_{AB}}^2 = 2\sigma_k^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{d_{AB}} = \sqrt{2}\sigma_k \quad (15)$$

Podobno lahko izpeljemo tudi za smerni kot  $\sigma_{\nu_A^B}$ . Tudi v tem primeru lahko enačbo 6 poenostavimo zaradi oblike parcialnih odvodov (preverite sami), kjer bi dobili:

$$\sigma_{\nu_A^B}^2 = 2\frac{\sigma_k^2}{d_{AB}^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\nu_A^B} = \sqrt{2}\frac{\sigma_k}{d_{AB}} \quad (16)$$

Ob podanih natančnostih dolžine  $\sigma_{d_{AB}}$  ali smernega kota  $\sigma_{\nu_A^B}$  so potrebne natančnosti koordinat  $\sigma_k$  enake:

- pri podani natančnosti dolžine  $d_{AB}$ :

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{d_{AB}}}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

- pri podani natančnosti smernega kota  $\nu_A^B$ :

$$\sigma_k = d_{AB} \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\sqrt{2}} \quad (18)$$

Kaj nam prikazujeta enačbi 17 in 18? Na natančnost dolžine ne vpliva geometrija točk (oddaljenost in orientacija), medtem ko na natančnost smernega kota vpliva razdalja med točkama, in sicer obratno sorazmerno.