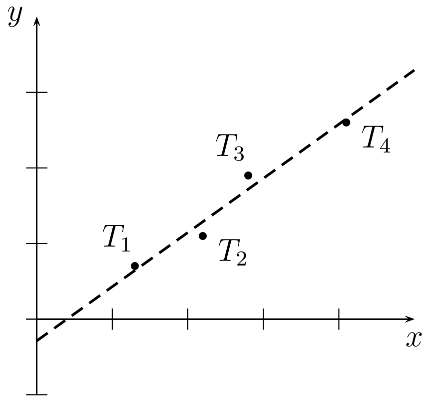
Posredna izravnava po MNK – Premica v ravnini:

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x, kot tudi koordinate y, vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1.

Tabela 1: Opazovane koordinate x in y štirih točk

Točka	x	y
T_1	1.3	0.7
T_2	2.2	1.1
T_3	2.8	1.9
T_4	4.1	2.6

Točke v ravnini prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi premico, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini

Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n = 8$, opazovane imamo tako 4 koordinate x in 4 koordinate y. Za določitev minimalnega števila opazovanj, da rešimo problem, pa prvo poskusimo nastaviti enačbe popravkov. Enačbe popravkov bodo oblike:

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - f_{y_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - f_{y_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - f_{x_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - f_{y_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - f_{x_4}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - f_{y_4}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

V enačbah 1 vektor $\mathbf{x}$ predstavlja vektor neznank. Enačbe popravkov sestavimo tako, da prvo zapišemo niz vseh izravnanih opazovanj na začetku enačbe. Potem pa vsa izravnana opazovanja predstavimo z neznankami. Ker želimo določiti premico, ki se optimalno prilega točkam, bomo za dve neznanki izbrali parametra premice a in b. Enačbo premice, $y = a\,x + b$, bomo uporabili za opazovane koordinate y, a ker v vsaki enačbi popravkov lahko nastopa le eno opazovanje, tu ne smemo uporabiti koordinate x. Zato za vsako opazovano koordinato x nastavimo novo neznanko, kar pomeni, da moramo dodatno uvesti še štiri neznanke, ki jih označimo s p_1, p_2, p_3 in p_4. Vidimo, da je minimalno število opazovanj enako:

$$n_0 = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1,p_2,p_3,p_4} = 6 \tag{2}$$

Ko imamo uvedene neznanke, jih damo v vektor neznank, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

Sedaj sestavimo končne enačbe popravkov kot:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - p_1 = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - a\,p_1 - b = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - p_2 = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - a\,p_2 - b = 0 \\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - p_3 = 0 \\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - a\,p_3 - b = 0 \\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - p_4 = 0 \\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - a\,p_4 - b = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Vidimo, da so enačbe popravkov iz 4 sestavljene po pravilih, v vsaki enačbi nastopa le eno (izravnano) opazovanje, ki se nato zapiše v odvisnosti od (le) neznank. Enačbe popravkov so nelinearne, zato je potrebno izračunati približne vrednosti neznank. Uporabimo opazovanja, kjer dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ p_{1,0} \\ p_{2,0} \\ p_{3,0} \\ p_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 - a_0\,x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 1.3 \\ 2.2 \\ 2.8 \\ 4.1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Sestavimo osnovni matrični model posredne izravnave, $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ se nanaša na vektor opazovanj, oziroma vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačb popravkov v 4, medtem ko se vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ nanaša na neznanke iz enačbe 3, oziroma na približne vrednosti neznank iz enačbe 5. Sestavimo prvo matriko koeficientov $\mathbf{B}$, ki je velikosti 8×6 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_1}{\partial p_3} & \frac{\partial F_1}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_3} & \frac{\partial F_2}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} & \frac{\partial F_3}{\partial p_2} & \frac{\partial F_3}{\partial p_3} & \frac{\partial F_3}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial p_1} & \frac{\partial F_4}{\partial p_2} & \frac{\partial F_4}{\partial p_3} & \frac{\partial F_4}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_5}{\partial a} & \frac{\partial F_5}{\partial b} & \frac{\partial F_5}{\partial p_1} & \frac{\partial F_5}{\partial p_2} & \frac{\partial F_5}{\partial p_3} & \frac{\partial F_5}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_6}{\partial a} & \frac{\partial F_6}{\partial b} & \frac{\partial F_6}{\partial p_1} & \frac{\partial F_6}{\partial p_2} & \frac{\partial F_6}{\partial p_3} & \frac{\partial F_6}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_7}{\partial a} & \frac{\partial F_7}{\partial b} & \frac{\partial F_7}{\partial p_1} & \frac{\partial F_7}{\partial p_2} & \frac{\partial F_7}{\partial p_3} & \frac{\partial F_7}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_8}{\partial a} & \frac{\partial F_8}{\partial b} & \frac{\partial F_8}{\partial p_1} & \frac{\partial F_8}{\partial p_2} & \frac{\partial F_8}{\partial p_3} & \frac{\partial F_8}{\partial p_4}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1,0} & -1 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-p_{2,0} & -1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-p_{3,0} & -1 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-p_{4,0} & -1 & 0 & 0 & 0 & -a_0
\end{bmatrix} \tag{6}$$

Nato sestavimo še vektor odstopanj **f** enačb popravkov, ki ima obliko:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_{1,0} - x_1 \\ a_0\, p_{1,0} + b_0 - y_1 \\ p_{2,0} - x_2 \\ a_0\, p_{2,0} + b_0 - y_2 \\ p_{3,0} - x_3 \\ a_0\, p_{3,0} + b_0 - y_3 \\ p_{4,0} - x_4 \\ a_0\, p_{4,0} + b_0 - y_4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Na osnovi matrike **B** iz enačbe 6 in vektorja **f** iz enačbe 7 sestavimo sistem normalnih enačb, in sicer tako, da izračunamo matriko **N** in vektor **t** in izračunamo vektor $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \qquad \mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \tag{8}$$

Numeričnih vrednosti v zgornje enačbe nismo dajali, saj je potrebno rešitev poiskati iterativno. Ko dobimo vektor $\boldsymbol{\Delta}$, popravimo približne vrednosti neznank iz enačbe 5 in ponovimo izravnavo. Postopek ponavljamo vse dokler velja:

$$||\boldsymbol{\Delta}|| < 1 \times 10^{-8} \tag{9}$$

V enačbi 9 operator $||\cdot||$ predstavlja normo vektorja (dolžino vektorja). Iterativni postopek je izveden spodaj:

Iteracija # 1:$||\Delta||$ =5.6550×10^{-1}

Iteracija # 2:$||\Delta||$ =3.8656×10^{-2}

Iteracija # 3:$||\Delta||$ =6.7343×10^{-3}

Iteracija # 4:$||\Delta||$ =3.0019×10^{-4}

Iteracija # 5:$||\Delta||$ =5.2921×10^{-5}

Iteracija # 6:$||\Delta||$ =2.3607×10^{-6}

Iteracija # 7:$||\Delta||$ =4.1575×10^{-7}

Iteracija # 8:$||\Delta||$ =1.8466×10^{-8}

Iteracija # 9:$||\Delta||$ =3.0000×10^{-9}

Po izvedenih 9-ih korakih iteracije so ocenjene neznanke enake:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.716\,208 \\ -0.287\,141 \\ 1.326\,543 \\ 2.110\,759 \\ 2.886\,041 \\ 4.076\,656 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Vektor popravkov $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ sta:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{x_3} \\ v_{y_3} \\ v_{x_4} \\ v_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.026\,543 \\ -0.037\,060 \\ -0.089\,241 \\ 0.124\,602 \\ 0.086\,041 \\ -0.120\,135 \\ -0.023\,344 \\ 0.032\,593 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.326\,543 \\ 0.662\,940 \\ 2.110\,759 \\ 1.224\,602 \\ 2.886\,041 \\ 1.779\,865 \\ 4.076\,656 \\ 2.632\,593 \end{bmatrix} \tag{11}$$