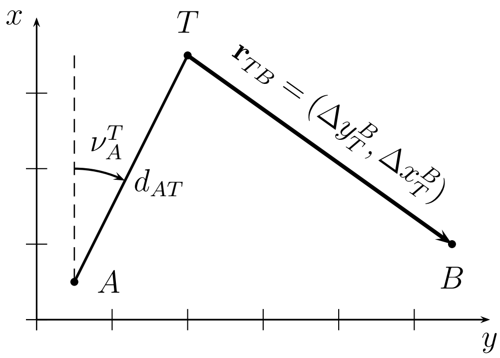
Prenos varianc in kovarianc pri MNK – Horizontalna geodetska mreža (položaj točke T):

Podane imamo koordinate dveh danih točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0\,\text{m}, 10.0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\text{m}, 20.0\,\text{m})$. Da bi določili koordinate točke $T(y_T, x_T)$, smo na točki A izmerili smerni kot $\nu_A^T = 30°57'$ in dolžino $d_{AT} = 58.3\,\text{m}$, na točki T pa bazni vektor $\mathbf{r}_{TB} = (\Delta y_T^B, \Delta x_T^B) = (60.0\,\text{m}, -40.0\,\text{m})$ proti točki B. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno in pogojno izravnavo izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$. Rešite tudi stohastični model izravnave in določite natančnost ocenjenih koordinat točke T.



Slika 1: Določitev koordinat točke T na osnovi danih točk A in B ter opazovanj ν_A^T, d_{AT} in $\mathbf{r}_{TB}$

Posredna izravnava tega primera je detajlno prikazana v datoteki *Naloga7_PolozajT.pdf* iz lanskega leta, ko smo obravnavali posredno izravnavo.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Vidimo, da imamo $n =$ ___ opazovanj, kjer želimo določiti koordinati y_T in x_T točke T, torej $n_0 =$ ___. Uvedemo $u =$ ___ neznanki, seveda, kar iskani količini, to sta koordinati $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T & x_T \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Sestavimo enačbe popravkov, ki povezujejo (izravnana) opazovanja in neznanke:

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{d}_{AT} - \sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{\nu}_A^T - \arctan\left(\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}\right) = 0 \\
F_3 &\equiv \Delta\hat{y}_T^B - y_B + y_T = 0 \\
F_4 &\equiv \Delta\hat{x}_T^B - x_B + x_T = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   Enačbe 1 zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, vendar moramo prvo nastaviti približne vrednosti neznank:

$$
\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - \Delta y_T^B \\ x_B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\,\text{m} \\ \underline{\quad}\,\text{m} \end{bmatrix}
\tag{2}
$$

Linearizirane enačbe popravkov iz enačbe 1, ob upoštevanju približnih vrednosti neznank iz enačbe 2, so oblike $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$ in so enake:

$$\begin{bmatrix} v_{d_{AT}} \\ v_{\nu_A^T} \\ v_{\Delta y_T^B} \\ v_{\Delta x_T^B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_T \\ \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato sta matrika uteži $\mathbf{P}$ in matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ enotski matriki $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n \times n}$.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{4}$$

   V enačbi 4 sta popravek $v_{\nu_A^T}$ in izravnana vrednost $\hat{\nu}_A^T$ podana v radianih. Zapišemo ju lahko tudi $v_{\nu_A^T} = \_''$ in $\hat{\alpha} = \_^\circ\_'\_''$.

   Če približni vrednostim neznank iz enačbe 2 prištejemo njihove popravke iz vektorja $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 4, dobimo izravnane koordinate točke T, in sicer:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} y_{T,0} + \delta y_T \\ x_{T,0} + \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{5}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Ker nas v nalogi zanimajo le natančnosti koordinat točke T, zapišimo rešitev stohastičnega modela le za neznanki:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_ \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_ \end{aligned} \tag{7}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.

Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe 7, z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$), in tudi tu bomo prikazali le kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$. Le-ta ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T, korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ iz enačbe 8, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = \_\_\text{mm} \quad \sigma_{x_T} = \_\_\text{mm} \quad \rho_{y_T x_T} = \_\_ \tag{9}$$

Kako bi nalogo lahko rešili s pogojno izravnavo? Sestaviti moramo $r =$ ___ pogojnih enačb. Iz slike 1 lahko preko geometrije naloge ugotovimo, da morata veljati:

$$\begin{aligned} y_B - y_A &= \hat{d}_{AT} \sin \hat{\nu}_A^T + \Delta\hat{y} \\ x_B - x_A &= \hat{d}_{AT} \cos \hat{\nu}_A^T + \Delta\hat{x} \end{aligned} \tag{10}$$

Enačbi 10 predstavljata osnovo za sestavo pogojnih enačb pogojne izravnave po MNK.