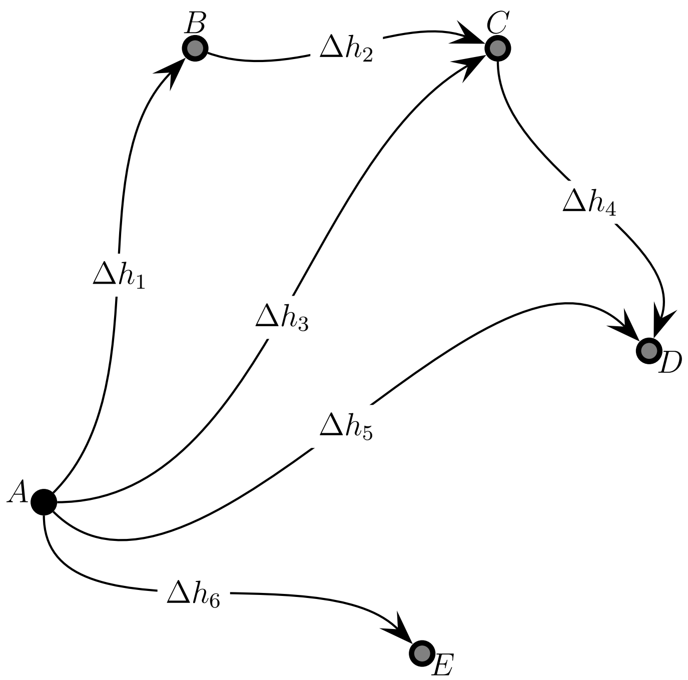
Prenos varianc in kovarianc pri MNK – Višinska geodetska mreža:

V nivelmanski mreži, kjer je višina točke A dana ($H_A = 320.00\,\mathrm{m}$), smo opazovali višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij, kakor jih prikazuje slika 1. Numerične vrednosti opazovanj so podane v preglednici 1.

Tabela 1: Izmerjene vrednosti višinskih razlik med reperji

VIŠINSKA RAZLIKA	**DOLŽINA LINIJE**
$\Delta h_1 = 0.25\,\mathrm{m}$	$\overline{AB} = 10\,\mathrm{m}$
$\Delta h_2 = 0.30\,\mathrm{m}$	$\overline{BC} = 20\,\mathrm{m}$
$\Delta h_3 = 0.60\,\mathrm{m}$	$\overline{AC} = 40\,\mathrm{m}$
$\Delta h_4 = -0.15\,\mathrm{m}$	$\overline{AD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_5 = 0.40\,\mathrm{m}$	$\overline{CD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_6 = -0.15\,\mathrm{m}$	$\overline{AE} = 10\,\mathrm{m}$

S posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite izravnane vrednosti višin reperjev B, C, D in E. Izračunajte tudi natančnosti izravnanih višin σ_{H_B}, σ_{H_C}, σ_{H_D} in σ_{H_E}, ter vse njihove korelacije $\rho_{H_iH_j}$ $(i, j = B, C, D, E \wedge i \neq j)$.



Slika 1: Opazovane višinske razlike v višinski geodetski mreži

Posredna izravnava tega primera je detajlno prikazana v datoteki *Naloga8_VisinskaMreza.pdf* iz lanskega leta, ko smo obravnavali posredno izravnavo.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Vidimo, da imamo $n =$ ___ opazovanj, kjer želimo določiti višine štirim reperjem ($n_0 =$ ___). Uvedemo $u =$ ___, najbolj smiselno, da so to kar višine točk $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_B & H_C & H_D & H_E \end{bmatrix}^\mathrm{T}$. Sestavimo enačbe popravkov, ki povezujejo (izravnana) opazovanja in neznanke:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}_1 - H_B + H_A = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta\hat{h}_2 - H_C + H_B = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta\hat{h}_3 - H_C + H_A = 0 \\ F_4 &\equiv \Delta\hat{h}_4 - H_D + H_C = 0 \\ F_5 &\equiv \Delta\hat{h}_5 - H_D + H_A = 0 \\ F_6 &\equiv \Delta\hat{h}_6 - H_E + H_A = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   Enačbe 1 zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, vendar moramo prvo nastaviti približne vrednosti neznank:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_{B,0} \\ H_{C,0} \\ H_{D,0} \\ H_{E,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h_1 \\ H_A + \Delta h_3 \\ H_A + \Delta h_5 \\ H_A + \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Linearizirane enačbe popravkov iz enačbe 1, ob upoštevanju približnih vrednosti neznank iz enačbe 2, so oblike $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$ in imajo obliko:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta H_B \\ \delta H_C \\ \delta H_D \\ \delta H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Ker imamo podane dolžine nivelmanskih linij, so opazovanja različnih natančnosti. Pri geometričnem nivelmanu nastavimo matriko uteži, ki ima po diagonali kar inverzne vrednosti dolžin nivelmanskih linij. Uteži opazovanj so enake:

$$\begin{aligned} p_1 &= \_\_ \quad p_2 = \_\_ \quad p_3 = \_\_ \\ p_4 &= \_\_ \quad p_5 = \_\_ \quad p_6 = \_\_ \end{aligned} \tag{4}$$

   V tem primeru se nismo potrudili, da bi bile uteži cela števila. Razloga za to sta dva. Prvi je, da ne računamo na roko, zato je vseeno, kakšne so numerične vrednosti. Drugi pa je v tem, da nastavimo pravilne enote za uteži. Utež posameznega opazovanja je dobljena kot $p_i = 1/d_i$ in ima enoto $[\mathrm{m}^{-1}]$. Ta enota bo pomembna pri izračunu referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ v nadaljevanju.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Če približni vrednostim neznank iz enačbe 2 prištejemo njihove popravke iz vektorja $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 5, dobimo izravnane višine novih reperjev:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{6}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Ker nas v nalogi zanimajo le natančnosti višin novih reperjev, zapišimo rešitev stohastičnega modela le za neznanke:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_ \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_ \end{aligned} \tag{8}$$

V enačbi 8 ima referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ enote $[\mathrm{m}^2\,\mathrm{m}^{-1}]$, zato ima referenčni standardni odklon a-posteriori enote $[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{m}}]$, ozirima če ga zapišemo kot $\hat{\sigma}_0 = \_\_\mathrm{mm}/\sqrt{\mathrm{m}}$, potem nam ta vrednost pove, kakšna je natančnost izmerjenih višin v milimetrih na vsak meter. V praksi zato matriko uteži velikokrat izračunamo tako, da dolžine nivelmanskih linij podajamo v [km] in dobimo natančnost višinskih razlik na dolžino linije [1km].

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.

Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe 8, z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Tudi tu bomo prikazali le kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, ki ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh višin novih reperjev, korenimo diagonalne elemente kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ iz enačbe 9, korelacije pa dobimo iz izvendiagonalnih elementov matrike. Za natančnosti dobimo:

$$\sigma_{H_B} = \_\_\mathrm{mm} \quad \sigma_{H_C} = \_\_\mathrm{mm} \quad \sigma_{H_D} = \_\_\mathrm{mm} \quad \sigma_{H_E} = \_\_\mathrm{mm} \tag{10}$$

Korelacije pa tudi v tem primeru zapišimo v pregledni obliki kot:

	H_B	H_C	H_D	H_E
H_B	__			
H_C	__	__		
H_D	__	__	__	
H_E	__	__	__	__