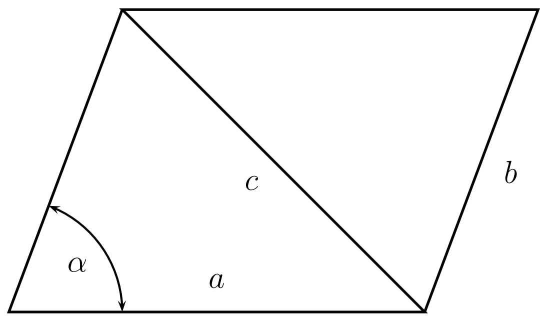
# Prenos varianc in kovarianc pri MNK – Parcela oblike paralelograma:

Parcela ima obliko paralelograma, v kateri smo izmerili tri stranice in en kot, kot prikazuje slika 1. Opazovanja so : $a = 8.00\,\mathrm{m}$, $b = 6.00\,\mathrm{m}$, $c = 7.10\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 5\,\mathrm{cm}$) in $\alpha = 60^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$). Izravnaj opazovanja s pogojno izravnavo po MNK in izračunaj površino parcele. Izračunaj tudi natančnosti vseh računanih količin in pripadajoče korelacije. Za izračun natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2$.




Slika 1: Skica parcele in izmerjenih opazovanj

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Pri parceli oblike paralelograma imamo $n =$ ___ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali $n_0 =$ ___. Število nadštevilnih opazovanj je torej $r =$ ___, kar določa število pogojnih enačb, ki ima obliko:

$$F_1 \equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{a}\hat{b}\cos\hat{\alpha} - \hat{c}^2 = 0 \tag{1}$$

   Če nastavimo vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & b & c & \alpha \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, potem pogojno enačbo 1 lahko zapišemo v osnovni matrični obliki pogojne izravnave izravnave, kjer dobimo:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti, ki so tudi podane. Če nastavimo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_a^2$, potem bodo kofaktorji $q_i$ in uteži $p_i$ opazovanj enake:

$$\begin{aligned} q_a &= \_\_ \quad q_b = \_\_ \quad q_c = \_\_ \quad q_\alpha = \_\_ \\ p_a &= \_\_ \quad p_b = \_\_ \quad p_c = \_\_ \quad p_\alpha = \_\_ \end{aligned} \tag{3}$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljata vektorja popravkov opazovanj in vektor izravnanih opazovanj:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$

   Popravki opazovanj in izravnana opazovanja iz enačbe 4 so podani v metrih za stranice in v radianih za kot $\alpha$. Popravek kota in izravnan kot v seksagezimalnem sistemu sta $v_\alpha = \_\_'$ in $\hat{\alpha} = \_\_^\circ \_\_' \_\_''$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_ \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_ \end{aligned} \tag{6}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
   Za izračun uporabimo referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2$ in z njo izračunamo obe iskani kovariančni matriki ($\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe 5 pomnožimo z $\sigma_0^2$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe 7, korelacije pa dobimo iz izvendiagonalnih elementov matrik. Natančnosti popravkov opazovanj so enake:

$$\sigma_{v_a} = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_b} = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_c} = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_\alpha} = \_\_' \tag{8}$$

   Korelacije pa zapišimo v pregledni obliki kot:

| | $v_a$ | $v_b$ | $v_c$ | $v_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_a$ | 1.00 | | | |
| $v_b$ | 1.00 | 1.00 | | |
| $v_c$ | −1.00 | −1.00 | 1.00 | |
| $v_\alpha$ | 1.00 | 1.00 | −1.00 | 1.00 |

   Iz zgornje preglednice je razvidno, da so vsi popravki med seboj popolnoma korelirani, korelacija je bodisi 1 bodisi -1. Kljub temu, da ta rezultat izgleda presenetljivo, ni s teoretičnega stališča nič posebnega. Lahko se pokaže, da je rang matrike $\mathbf{Q}_{vv}$ enak $rang(\mathbf{Q}_{vv}) = r = 1$, kar pomeni, da je samo en popravek neodvisen, ostali trije pa so odvisni popravki.

   Izpišimo še natančnosti izravnanih opazovanj, ki so:

$$\sigma_{\hat{a}} = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{b}} = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{c}} = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{\alpha}} = \_\_' \tag{9}$$

   Korelacije med izravnanimi opazovanji izpišimo na enak način, kot pri popravkih:

| | $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{c}$ | $\hat{\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{a}$ | 1.00 | | | |
| $\hat{b}$ | −0.09 | 1.00 | | |
| $\hat{c}$ | 0.38 | 0.14 | 1.00 | |
| $\hat{\alpha}$ | −0.39 | −0.14 | 0.64 | 1.00 |

   Ker pa velja, da je $rang(\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}) = n_0 = 3$, pomeni, da je samo eno izravnano opazovanje odvisno, tri so na neodvisna. Zato so korelacije med izravnanimi opazovanji različne od 1 ali -1, kot to velja za popravke opazovanj.

Naloga od nas zahteva še izračun površine $S$ parcele in njene natančnosti $\sigma_S$. Izhajamo iz izravnanih opazovanj in površino $S$ parcele, ki je oblike paralelograma, izračunamo kot:

$$S = \hat{a}\hat{b}\sin\hat{\alpha} = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{10}$$

Natančnost bomo tudi tu izračunali s pomočjo zakona o prenosu varianc in kovarianc. Izhajamo iz vektorja izravnanih opazovanj $\hat{l}$ iz enačbe 4, za katerega imamo izračunano kovariančno matriko v enačbi 7, funkcijska povezava pa je določena v enačbi 10. Za izračunano natančnost površine dobimo:

$$\sigma_S = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{11}$$