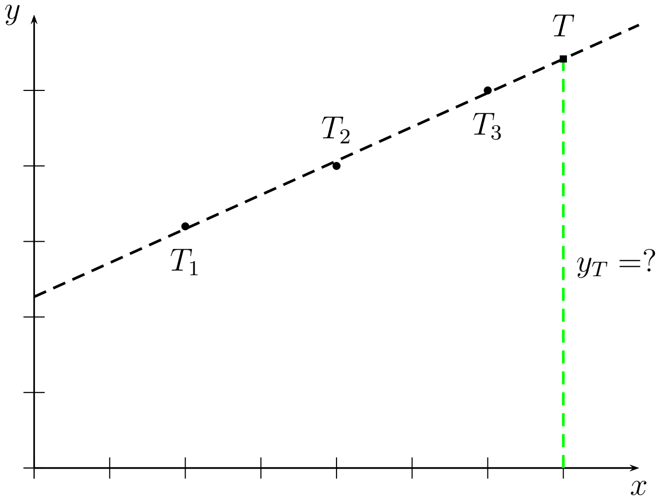
# Prenos varianc in kovarianc pri MNK – Premica v ravnini:

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate $x$, koordinate $y$ pa so opazovane, $T_1(x_1, y_1) = (2.0, 3.2)$, $T_2(x_2, y_2) = (4.0, 4.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (6.0, 5.0)$, kot prikazuje slika 1. Če je bila koordinata $y_3$ izmerjena dvakrat bolj natančno kot ostali dve, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj tudi natančnost določenih parametrov premice. Izračunaj koordinato $y_T$ za točko $T$, ki ima $x_T = 7.0$ ter njeno natančnost $\sigma_{y_T}$.




Slika 1: Točke v ravnini

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Izmerjene imamo koordinate $y$ točk, torej $n = \underline{\quad}$. Za enolično določitev premice potrebujemo $n_0 = \underline{\quad}$ opazovanj, zato imamo $r = \underline{\quad}$ opazovanj. Uvedemo $u = \underline{\quad}$ neznank, ki sta ravno parametra premice, torej $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Enačbe popravkov sestavimo v obliki:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\,x_1 - b = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\,x_2 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\,x_3 - b = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   Enačbe 1 zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, kjer za približno vrednost neznanke izberemo $a_0 = b_0 = 0.0$. Dobimo:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti, ne vemo pa, kakšne te natančnosti so. Vemo le, da je natančnost koordinate $y_3$ dvakrat večja od natančnosti ostalih dveh koordinat

$y_1$ in $y_2$. Če si izberemo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_{y_1}^2$, bosta matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ in uteži $\mathbf{P}$ opazovanj enaki:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$

   Končna parametra premice $a$ in $b$ dobimo tako, da popravka parametra iz vektorja $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 4 prištejemo približnim vrednostim. Ker sta približni vrednosti enaki 0.0, dobimo seveda kar vektor $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{5}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_ \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_ \end{aligned} \tag{7}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.

Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe 7, z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe 6 pomnožimo z varianco iz enačbe 7 in dobimo:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{vv} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe 8, korelacije pa dobimo iz izvendiagonalnih elementov matrik. Za neznanke dobimo:

$$\sigma_a = \_\_ \qquad \sigma_b = \_\_ \qquad \rho_{ab} = \_\_ \tag{9}$$

   Natančnosti in korelacije popravkov opazovanj so enake:

$$\begin{aligned} \sigma_{v_1} &= \_\_ & \sigma_{v_2} &= \_\_ & \sigma_{v_3} &= \_\_ \\ \rho_{v_1v_2} &= \_\_ & \rho_{v_1v_3} &= \_\_ & \rho_{v_2v_3} &= \_\_ \end{aligned} \tag{10}$$

   Natančnosti in korelacije izravnanih opazovanj pa so enake:

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{y}_1} &= \_\_ & \sigma_{\hat{y}_2} &= \_\_ & \sigma_{\hat{y}_3} &= \_\_ \\ \rho_{\hat{y}_1\hat{y}_2} &= \_\_ & \rho_{\hat{y}_1\hat{y}_3} &= \_\_ & \rho_{\hat{y}_2\hat{y}_3} &= \_\_ \end{aligned} \tag{11}$$

Na koncu izračunajmo še $y_T$ in njeno natančnost $\sigma_{y_T}$. Izračun koordinate $y_T$ je enak:

$$y_T = a\, x_T + b = \_\_ \tag{12}$$

Kako izračunati natančnost $\sigma_{y_T}$? Uporabimo zakon o prenosu varianc in kovarianc, izhajamo iz enačbe 12, kjer ugotovimo, da smo za izračun $y_T$ uporabili vektor $\mathbf{x}$, za katerega poznamo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$. Prvo nastavimo jakobijevo matriko $\mathbf{J}$, ki ima obliko:

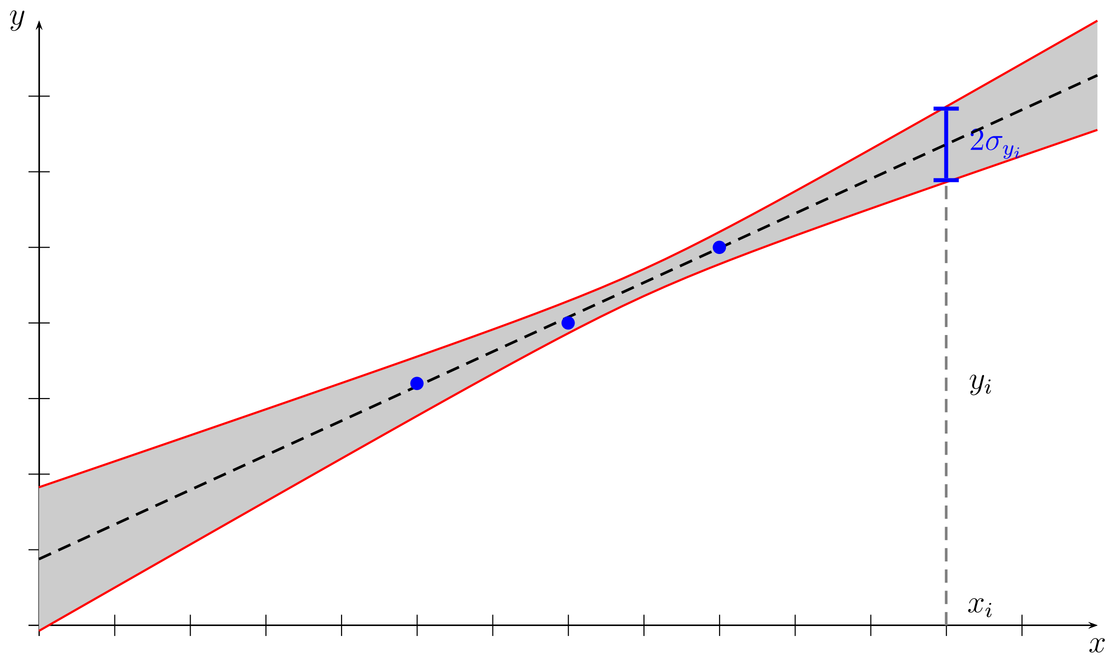
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial a} & \frac{\partial y_T}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{13}$$

Nato pa po zakonu o prenosu varianc in kovarianc izračunamo varianco $\sigma_{y_T}^2$ in nato še natančnost $\sigma_{y_T}$:

$$\sigma_{y_T}^2 = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \_\_ \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{y_T} = \_\_ \tag{14}$$

Naloga, kot je prikazana v tem primeru, je zelo pogost primer uporabe MNK v geodeziji in se nanaša na interpolacijo. Pri interpolaciji imamo na voljo le niz točk v ravnini (kot

so tri točke v nalogi), kjer so po navadi za dane koordinate $x$ izmerjene koordinate $y$. Predpostavlja se, da točke ležijo na neki krivulji (v našem primeru premici), ki ji ne poznamo enačbe. Zato z MNK poskušamo geometrijo te krivulje oceniti z enostavnimi funkcijami (premica, polinomi in podobno), cilj pa je, da lahko za poljubno koordinato $x$ izračunamo koordinato $y$ (v nalogi smo za $x_T$ nato računali $y_T$). Drug zelo pomemben rezultat pa je tudi ocena kakovosti interpolirane vrednosti koordinate $y$.
V našem primeru predpostavljamo, da točke ležijo na premici, zato smo izračunali premico, ki se optimalno prilega točkam (na sliki črtkana črna črta), kot to prikazuje slika 2. Na osnovi enačbe te premice lahko za vsako koordinato $x$ izračunamo (interpoliramo) vrednost koordinate $y$. Ko računamo vrednost $y$ za tak $x$, ki leži znotraj podanih točk, temu pravimo interpolacija, če pa $x$ leži izven točk (kot je to primer na sliki spodaj – siva črtkana črta), pa temu rečemo ekstrapolacija. Kakovost interpoliranih točk je podana s sivim območjem, ki je omejeno z rdečima krivuljama. Takoj lahko vidimo, da je sivo območje ožje tam, kjer so točke in se razširja z oddaljevanjem od točk. Posledica je, da so interpolirane točke veliko boljše kakovosti, kot ekstrapolirane točke. Kako pa določimo natančnost interpoliran/ekstrapolirane točke? Le-ta je prikazana z modrim intervalom za interpolirano vrednost $y_i$.




Slika 2: Prikaz natančnosti interpoliranih točk na premici