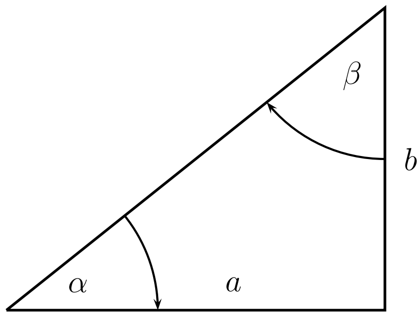
Prenos varianc in kovarianc – Parcela pravokotne oblike, merjeni stranici

Parcela ima obliko pravokotnega trikotnika, kot to prikazuje slika 1. Z razdaljemerom, ki ima podano natančnost izmerjenih dolžin kot $\sigma_d = 1.0\,\mathrm{cm}/10\,\mathrm{m}$ smo izmerili stranici $a = 61.090\,\mathrm{m}$ in $b = 50.170\,\mathrm{m}$. Izračunajte oba notranja kota α in β, njuni natančnosti σ_α in σ_β ter njuno korelacijo $\rho_{\alpha\beta}$. Primerjaj rezultate z enako nalogo lanskega leta, pri poglavju Prenos pravih pogreškov.



Slika 1: Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$. Izmerjeni imamo dve stranici, a in b, zato je $n =$ ___. Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je velikosti ___ $\times 1$ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Da sestavimo kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ moramo prvo izračunati natančnosti obeh opazovanj. Velja:

$$\sigma_a = a \cdot \sigma_d = \_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_b = a \cdot \sigma_d = \_\_\mathrm{m} \tag{2}$$

Na osnovi izračunanih standardnih odklonov iz enačbe 2 sestavimo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$, ki je velikosti ___ $\times$ ___, in ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j $(j = 1, \ldots, m)$ in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$. Glede na navodilo naloge, nas zanimata oba notranja kota, to sta α in β, zato je $m =$ ___ in vektor $\mathbf{y}$ velikosti ___ $\times 1$:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
   Izračun obeh neznank izhaja iz osnovnih definicij kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku. Velja:

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a} = \_\_^\circ\_\_'\_\_'' \qquad \beta = \arctan\frac{a}{b} = \_\_^\circ\_\_'\_\_'' \tag{5}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunamo vse parcialne odvode in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Le-ta je velikosti $\_\_ \times \_\_$ in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial a} & \frac{\partial\alpha}{\partial b} \\ \frac{\partial\beta}{\partial a} & \frac{\partial\beta}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{-a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
   Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ (enačba 3) in jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba 6), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
   Natančnosti obeh kotov sta:

$$\sigma_\alpha = \_\_\_\_'' \qquad \sigma_\beta = \_\_\_\_'' \tag{8}$$

   Korelacija med obema kotoma $\rho_{\alpha\beta}$ pa je enaka:

$$\rho_{\alpha\beta} = \_\_\_\_ \tag{9}$$

Kakšna pa je primerjava rezultatov iz enačb 8 in 9 z rezultati naloge pri prenosu varianc in kovarianc? V primeru prenosa pravih pogreškov smo ugotovili, da lahko obstaja situacija ob ustrezni geometriji problema in velikosti pravih pogreškov opazovanj, ko bo izračun neznank neodvisen od pogreškov v opazovanjih. Tam sta bila prava pogreška obeh kotov ($\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$) enaka nič, saj so bili pravi pogreški dolžin taki, da se je ohranjala oblika trikotnika. V primeru zakona o prenosu varianc in kovarianc, pa take situacije ni več, saj ne gledamo več na posamezne pogreške ampak na statistične lastnosti pogreškov.