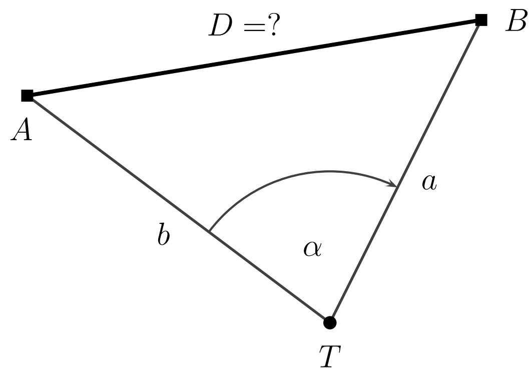
# Prenos varianc in kovarianc – Izračun dolžine $D$

Določiti želimo dolžino $D$ med točkama $A$ in $B$ in njeno natančnost $\sigma_D$. A ker je med točkama ovira, dolžine neposredno ne moremo izmeriti, zato smo stabilizirali začasno točko $T$, na kateri smo izmerili dve stranici ($a$ in $b$) in en kot ($\alpha$). Situacijo prikazuje slika 1. Opazovanja s pripadajočimi natančnostmi so: $a = 40.00\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.03\,\mathrm{m}$), $b = 60.00\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0.05\,\mathrm{m}$) in $\alpha = 45°$ ($\sigma_\alpha = 2.5'$). Izračunaj dolžino $D$, njeno natančnost $\sigma_D$ in korelacijo dolžine $D$ z vsemi opazovanji: $\rho_{Da}$, $\rho_{Db}$ in $\rho_{D\alpha}$.




Slika 1: Prikaz meritev za določitev dolžine $D$

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo varianc̆no-kovariančno matriko $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$.
   V navodilih so podana tri opazovanja, to sta stranici $a$ in $b$ ter kot $\alpha$, saj imamo za vsa tri opazovanja podane tudi natančnosti ($n =$ ___). Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je velikosti ___ $\times 1$, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Sestavimo variančno-kovariančno matriko $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ opazovanj. Le-ta so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Matrika je velikosti ___ $\times$ ___, variance (diagonalni elementi matrike) pa imajo vrednosti:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\ \sigma_b^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\ \sigma_\alpha^2 &= \_\_ \end{aligned} \tag{2}$$

2. Določimo vse naše neznanke $y_j$ ($j = 1, \ldots, m$) in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   V prvi vrsti nas zanima izračun dolžine $D$. A ker naloga zahteva tudi izračun korelacij med neznanko ($D$) in vsemi opazovanji ($a$, $b$ in $\alpha$), potem bomo vektor

neznank $\mathbf{y}$ razširili tako, da bomo vanj dali tako neznanko $D$ kot tudi vsa opazovanja $a$, $b$ in $\alpha$, Zato bo $n =$ ___ in vektor $\mathbf{y}$ bo velikosti ___ $\times$ 1:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} D \\ a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
   Izraziti moramo, kako se dolžina $D$ izrazi s stranicama $a$ in $b$ ter kotom $\alpha$. Iz slike 1 vidimo, da imamo trikotnik, kjer imamo izmerjeni dve stranici in vmesni kot, računamo pa tretjo stranico. Uporabimo torej kosinusni izrek in dobimo:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = \_\_\mathrm{m} \tag{4}$$

   Za vse ostale tri "neznanke" pa nastavimo identitete:

$$a = a \qquad b = b \qquad \alpha = \alpha \tag{5}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunajmo prvo parcialne odvode neznanke $D$ po vseh treh opazovanjih. Odvajamo enačbo 4 po $a$, $b$ in $\alpha$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \frac{a - b\cos\alpha}{D} = \_\_ \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{b - a\cos\alpha}{D} = \_\_ \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha} &= \frac{ab\sin\alpha}{D} = \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{6}$$

   Odvajati moramo tudi enačbe 5 po vseh treh opazovanjih. Jakobijeva matrika je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial a} & \frac{\partial D}{\partial b} & \frac{\partial D}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial b} & \frac{\partial a}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial b}{\partial a} & \frac{\partial b}{\partial b} & \frac{\partial b}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial a} & \frac{\partial \alpha}{\partial b} & \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
   Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ (enačba 2) in jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba 7), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_{Da} & \sigma_{Db} & \sigma_{D\alpha} \\ \sigma_{Da} & \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{Db} & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ \sigma_{D\alpha} & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8}
$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank $\sigma_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
   Prvo izračunajmo natančnost $\sigma_D$ izračunane dolžine $D$. Dobimo:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_D^2} = \_\_\_\mathrm{m} \tag{9}$$

   Iz prve vrstice kovariančne matrike neznank $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ v enačbi 8 pa izračunajmo še vse tri korelacije neznanke z opazovanji, torej:

$$
\begin{aligned}
\rho_{Da} &= \frac{\sigma_{Da}}{\sigma_D \sigma_a} = \_\_\_ \\
\rho_{Db} &= \frac{\sigma_{Db}}{\sigma_D \sigma_b} = \_\_\_ \\
\rho_{D\alpha} &= \frac{\sigma_{D\alpha}}{\sigma_D \sigma_\alpha} = \_\_\_
\end{aligned} \tag{10}
$$