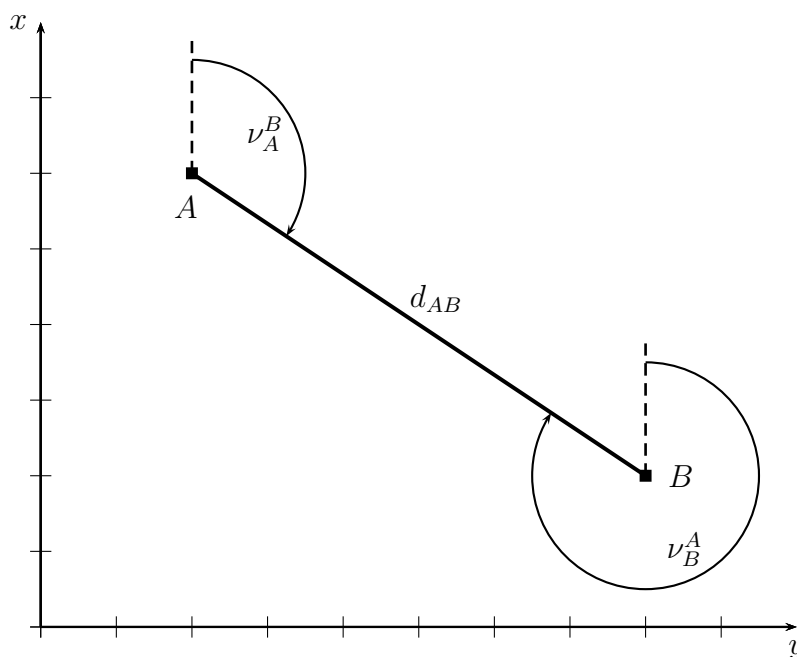


Prenos varianc in kovarianc – Geodetski polarni in kar- tezični koordinatni sistem:

Podani imamo dve točki v geodetskem kar-tezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi natančnostmi, in sicer $A(y_A, x_A) = (461\,300.0\text{ m}, 100\,600.0\text{ m})$ ($\sigma_{y_A} = 0.1\text{ m}$, $\sigma_{x_A} = 0.075\text{ m}$) in $B(y_B, x_B) = (461\,500.0\text{ m}, 100\,500.0\text{ m})$ ($\sigma_{y_B} = 0.08\text{ m}$, $\sigma_{x_B} = 0.05\text{ m}$), kot to prikazuje slika 1. Izračunaj komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, to so: dolžino med točkama d_{AB} in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A ter njihove natančnosti ($\sigma_{d_{AB}}$, $\sigma_{\nu_A^B}$ in $\sigma_{\nu_B^A}$) in korelacije ($\rho_{d_{AB}\nu_A^B}$, $\rho_{d_{AB}\nu_B^A}$ in $\rho_{\nu_A^B\nu_B^A}$).



Slika 1: Skica obeh točk in elementov geodetskega polarnega koordinatnega sistema

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} . Podatki naloge kažejo na to, da imamo $n = \underline{\quad}$ opazovanj, to so koordinate obeh točk, saj imajo podane natančnosti. Vektor opazovanj \mathbf{x} je torej:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\text{m} \\ \underline{\quad}\text{m} \\ \underline{\quad}\text{m} \\ \underline{\quad}\text{m} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} opazovanj, ki so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Matrika je zato diagonalna, po diagonali pa so variance enake:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A}^2 &= \underline{\quad}\text{m}^2 & \sigma_{x_A}^2 &= \underline{\quad}\text{m}^2 \\ \sigma_{y_B}^2 &= \underline{\quad}\text{m}^2 & \sigma_{x_B}^2 &= \underline{\quad}\text{m}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} . Zanimajo nas vsi trije elementi geodetskega polarnega koordinatnega sistema, torej:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} \quad (3)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznančkami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznanek \mathbf{y} .

Izhajamo iz enačb pretvorbe med geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom in geodetskih polarnim koordinatnim sistemom, torej:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \text{_____m} \\ \nu_A^B &= \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{_____m} \end{aligned} \quad (4)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Ker imamo $n = \text{_____}$ neznanke in $n = \text{_____}$ opazovanja, je matrika \mathbf{J} dimenzije $\text{_____} \times \text{_____}$ in ima obliko (parcialne odvode izpeljite sami za vajo):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad (5)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznanek $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba 2) in jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba 5), lahko izračunamo kovariančno matriko neznanek Σ_{yy} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{d_{AB}}^2 & \sigma_{d_{AB}\nu_A^B} & \sigma_{d_{AB}\nu_B^A} \\ \sigma_{d_{AB}\nu_A^B} & \sigma_{\nu_A^B}^2 & \sigma_{\nu_A^B\nu_B^A} \\ \sigma_{d_{AB}\nu_B^A} & \sigma_{\nu_A^B\nu_B^A} & \sigma_{\nu_B^A}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznanek Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznanek σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznančkami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Prvo izračunajmo natančnosti izračunanih količin:

$$\sigma_{d_{AB}} = \text{_____m} \quad \sigma_{\nu_A^B} = \text{_____}'' \quad \sigma_{\nu_B^A} = \text{_____}'' \quad (7)$$

V drugo pa izračunajmo še korelacije med neznančkami:

$$\rho_{d_{AB}\nu_A^B} = \text{---} \quad \rho_{d_{AB}\nu_B^A} = \text{---} \quad \rho_{\nu_A^B\nu_B^A} = \text{---} \quad (8)$$

Izračunane natančnosti iz enačbe 7 in korelacije iz enačbe 8 podajajo zanimive rezultate. Vidimo, da sta natančnosti obeh kotov enaki, kota sta popolnoma korelirana ($\rho_{\nu_A^B \nu_B^A} = \underline{\quad}$), oba kota sta tudi enako korelirana z dolžino. Rezultat je seveda pričakovan. Smerna kota sta povezana z enačbo:

$$\nu_B^A = \nu_A^B + 180^\circ \quad (9)$$

Kar pomeni, da če se spremeni en kot, se mora za enako vrednost spremeniti tudi drug kot. Taka linearna enačba je že zadosten pogoj za popolno korelacijo.