# Prenos varianc in kovarianc – Trigonometrično višinomerstvo:

S postopkom trigonometričnega višinomerstva želimo določiti višino $H_B$ točke $B$ in njeno natančnost $\sigma_{H_B}$, pri tem, da imamo podano višino $H_A = 320.00\,\mathrm{m}$ točke $A$, na katero smo prisilno centrirali tahimeter in izmerili njegovo višino $i = 25.0\,\mathrm{cm}$. Na točko $B$ smo postavili reflektor na višino $l = 2.0\,\mathrm{m}$, z natančnostjo $\sigma_l = 5\,\mathrm{mm}$. S tahimetrom smo izmerili poševno dolžino $s = 100.0\,\mathrm{m}$, z natančnostjo $\sigma_s = 1.0\,\mathrm{cm}$, in zenitno razdaljo $z = 85°$, z natančnostjo $\sigma_z = 15''$. Izračunajte višino točke $H_B$ točke $B$ in njeno natančnost $\sigma_{H_B}$.

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$.
   Ko sestavljamo vektor opazovanj $\mathbf{x}$, moramo razlikovati med opazovanji in konstantami. Kot opazovanja obravnavamo vse podatke, za katere imamo podane natančnosti. Iz naloge je razvidno, da imajo natančnosti podana opazovanja $s$, $z$ in $l$, medtem ko $H_A$ in $i$ nimata podane natančnosti, zato sta obravnavana kot konstanti. Število opazovanj je $n =$ ___, dimenzija vekorja $\mathbf{x}$ pa je zato ___ $\times 1$. V vektor opazovanj vstavimo numerične vrednosti, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s \\ z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Sestavimo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ opazovanj, ki so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Dobimo:

$$\mathbf{\Sigma}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \_\_ & 0 \\ 0 & 0 & \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Določimo vse naše neznanke $y_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Ker nas zanima le višina $H_B$ točke $B$, velja $m =$ ___, torej:

$$\mathbf{y} = [H_B] \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
   Izhajamo iz enačbe trigonometričnega višinomerstva (zanemarimo vpliv refrakcije in ukrivljenosti Zemlje) in dobimo:

$$H_B = H_A + s\cos z + i - l = \_\_\_\_\,\mathrm{m} \tag{4}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.

Izračunati moramo parcialne odvode neznanke po vseh opazovanjih in sestaviti matriko $\mathbf{J}$. Ker je enačba 4 enostavna, bomo samo zapisali jakobijevo matriko $\mathbf{J}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H_B}{\partial s} & \frac{\partial H_B}{\partial z} & \frac{\partial H_B}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos z & -s \sin z & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
   Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ (enačba 2) in jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba 5), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \left[\sigma_{H_B}^2\right] = \left[\_\_\mathrm{m}^2\right] \tag{6}$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank $\sigma_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
   Izračunamo še natančnost višine točke $B$:

$$\sigma_{H_B} = \_\_\mathrm{m} \tag{7}$$