

Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Geodetsko inženirstvo in upravljanje nepremičnin, 1. letnik

ANALIZA OPAZOVANJ V GEODEZIJI 1 - VAJE

Dodatne naloge izravnave po MNK

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Kazalo vsebine

Kazalo vsebine	i
Kazalo slik	ii
Kazalo preglednic	iii
1 Dodatni primeri izravnave	1

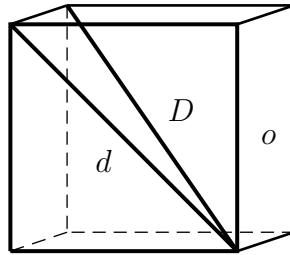
Kazalo slik

1-1	Naloga 1	1
1-2	Naloga 2	1
1-3	Naloga 3	2
1-4	Naloga 4	2
1-5	Naloga 5	2
1-6	Naloga 6	3
1-7	Naloga 10	3
1-8	Naloga 11	3
1-9	Naloga 12	4
1-10	Naloga 13	4
1-11	Naloga 14	5
1-12	Naloga 15	5
1-13	Naloga 16	5
1-14	Naloga 17	6
1-15	Naloga 18	6
1-16	Naloga 19	6
1-17	Naloga 20	7
1-18	Naloga 21	7
1-19	Naloga 22	7
1-20	Naloga 23	8
1-21	Naloga 24	8
1-22	Naloga 25	8

Kazalo preglednic

1 Dodatni primeri izravnave

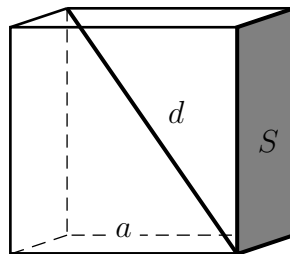
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14.0$ m), prostorsko diagonalo ($D = 17.0$ m) in obseg osnovne ploskve ($o = 40.0$ m). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonalali (d in D) korelirani, saj velja $\rho_{dD} = -0.5$. Izračunaj velikost osnovne ploskve a in njeno natančnost σ_a . Izračunaj tudi prostornino kocke V in njeno natančnost σ_V .



Slika 1-1: Naloga 1

REŠITEV: $a = 9.943$ m, $v_d = 6.2$ cm, $v_D = 22.2$ cm, $v_o = -22.7$ cm, $V = 983.03$ m³.

2. V kocki smo opazovali: stranico $a = 10.1$ m ($\sigma_a = 0.1$ m), prostorsko diagonalo $d = 17.4$ m ($\sigma_d = 0.15$ m) in površino osnovne ploskve $S = 99.5$ m² ($\sigma_S = 0.7$ m²). Izravnajte opazovanja in določite velikost kocke.



Slika 1-2: Naloga 2

REŠITEV: $\hat{a} = 9.996$ m, $\hat{d} = 17.314$ m, $\hat{S} = 99.913$ m².

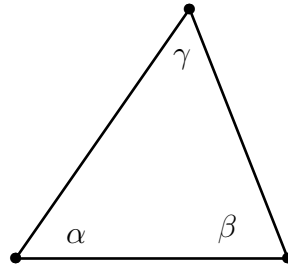
3. V trikotniku smo izmerili vse tri kote in dobili $\alpha = 64^\circ 33'$, $\beta = 60^\circ 30'$ in $\gamma = 55^\circ 0'$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_\alpha = 1'$, $\sigma_\beta = 2'$ in $\sigma_\gamma = 2'$), izravnaj opazovanja po MNK.

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 64^\circ 32' 40''$, $\hat{\beta} = 60^\circ 28' 40''$, $\hat{\gamma} = 54^\circ 58' 40''$.

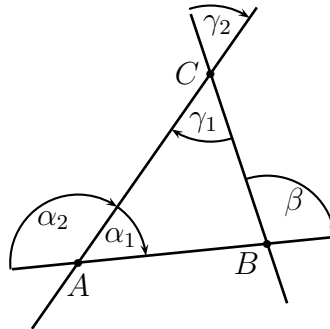
4. Med tremi premicami, ki s presečišči sestavijo trikotnik (glej slike) smo izmerili 5 kotov, in sicer $\alpha_1 = 50^\circ$, $\alpha_2 = 131^\circ$, $\beta = 106^\circ$, $\gamma_1 = 55^\circ$, $\gamma_2 = 53^\circ$. Če je kot β izmerjen dvakrat bolj natančno od ostalih kotov, s posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.

REŠITEV: $\hat{\alpha}_1 = 50^\circ 30'$, $\hat{\alpha}_2 = 129^\circ 30'$, $\hat{\beta} = 105^\circ 30'$, $\hat{\gamma}_1 = 55^\circ 0'$, $\hat{\gamma}_2 = 55^\circ 0'$.

5. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti,

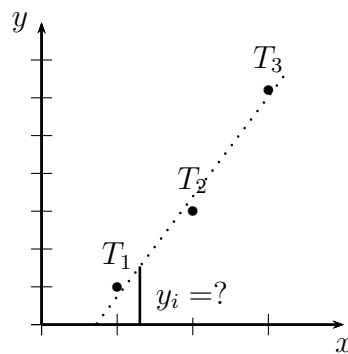


Slika 1-3: Naloga 3



Slika 1-4: Naloga 4

s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra a in b), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate y_i pri vrednosti koordinate $x_i = 1.3$.



Slika 1-5: Naloga 5

REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\hat{y}_1 = 0.983$, $\hat{y}_2 = 3.033$, $\hat{y}_3 = 5.083$, $y_i = 1.5983$.

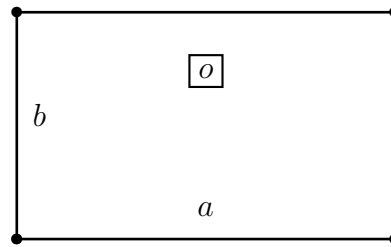
6. Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici: $a = 12.4$ m in $b = 7.5$ m ter obseg $o = 40.0$ m. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_a = \sigma_b = 1$ dm, $\sigma_o = 2$ dm) in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.

REŠITEV: $v_a = v_b = 3.33$ cm, $v_o = -6.67$ cm, $S = 93.664$ m².

7. Nalogo 5 reši tako, da predpostaviš, da je prosti člen $b = -1.0$.

REŠITEV: $a = 2.02$, $\hat{y}_1 = 1.021$, $\hat{y}_2 = 3.043$, $\hat{y}_3 = 5.064$, $y_i = 1.628$.

8. Nalogo 5 reši tako, da so opazovane koordinate x , medtem ko so koordinate y dane. Kako bi to nalogo lahko rešili najbolj enostavno?



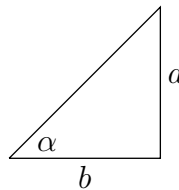
Slika 1-6: Naloga 6

REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\hat{x}_1 = 1.008$, $\hat{x}_2 = 1.984$, $\hat{x}_3 = 3.008$, $y_i = 1.598$.

9. V krogli smo izmerili polmer $R = 3.65$ m ($\sigma_R = 3$ cm), premer $D = 7.1$ m ($\sigma_D = 3$ cm), površino $A = 158.4$ m² ($\sigma_A = 0.12$ m²) in prostornino $V = 187.5$ m³ ($\sigma_V = 0.15$ m³). Izravnajte opazovanja s posredno in pogojno izravnavo po MNK.

REŠITEV: $\hat{R} = 3.5528$ m, $\hat{D} = 7.1057$ m, $\hat{A} = 158.5034$ m², $\hat{V} = 187.4243$ m³.

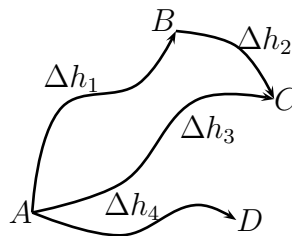
10. V pravokotnem trikotniku smo izmerili: $a = 10.0$ m, $b = 15.0$ m, in $\alpha = 30^\circ$. Če so natančnosti opazovanj dane kot $\sigma_a = 1$ cm, $\sigma_b = 2$ cm in $\sigma_\alpha = 30'$, izravnaj opazovanja in določi površino trikotnika S .



Slika 1-7: Naloga 10

REŠITEV: $v_a = -0.44$ cm, $v_b = 1.01$ cm, $v_\alpha = 3.81^\circ$, $S = 75.018$ m².

11. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper A dano višino $H_A = 10.0$ m. Izmerili smo 4 višinske razlike s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij: $\Delta h_1 = -1.01$ m ($d_1 = 50$ m), $\Delta h_2 = 0.73$ m ($d_2 = 20$ m), $\Delta h_3 = -0.25$ m ($d_3 = 50$ m) in $\Delta h_4 = 0.12$ m ($d_4 = 50$ m). Izravnaj opazovanja in določi višine reperjev B , C in D .

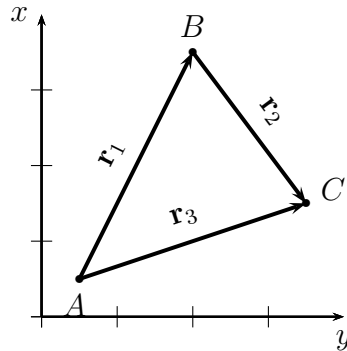


Slika 1-8: Naloga 11

REŠITEV: $v_1 = 1.25$ cm, $v_b = 0.50$ cm, $v_3 = -1.25$ cm, $v_4 = 0.0$ cm, $H_B = 9.0025$ m, $H_C = 9.7375$ m, $H_D = 10.12$ m.

12. Podano imamo eno točko, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0 \text{ m}, 10.0 \text{ m})$. Za določitev koordinat dveh novih točk $B(y_B, x_B)$ in $C(y_C, x_C)$ smo izmerili tri vektorje $\mathbf{r}_1 = (\Delta y_1, \Delta x_1) = (70.1 \text{ m}, 89.8 \text{ m})$,

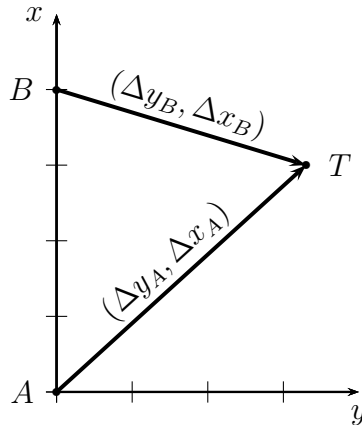
$\mathbf{r}_2 = (\Delta y_2, \Delta x_2) = (69.8 \text{ m}, -69.9 \text{ m})$ in $\mathbf{r}_3 = (\Delta y_3, \Delta x_3) = (140.2 \text{ m}, 19.7 \text{ m})$. Če so komponente vektorja $\mathbf{r}_3$ določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, izravnajte opazovanja in določite koordinate točk B in C .



Slika 1–9: Naloga 12

REŠITEV: $v_{\Delta y_1} = 13.33 \text{ cm}$, $v_{\Delta x_1} = -8.89 \text{ cm}$, $v_{\Delta y_2} = 13.33 \text{ cm}$, $v_{\Delta x_2} = -8.89 \text{ cm}$, $v_{\Delta y_3} = -3.33 \text{ cm}$, $v_{\Delta x_3} = 2.22 \text{ cm}$, $y_B = 80.233 \text{ m}$, $y_B = 99.711 \text{ m}$, $y_C = 150.167 \text{ m}$, $y_C = 29.722 \text{ m}$, .

13. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (0 \text{ m}, 5 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja; $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3.5 \text{ m}, 2.1 \text{ m})$ in $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3.4 \text{ m}, -3.0 \text{ m})$. Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T , če je bazni vektor s točke A določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke B .



Slika 1–10: Naloga 13

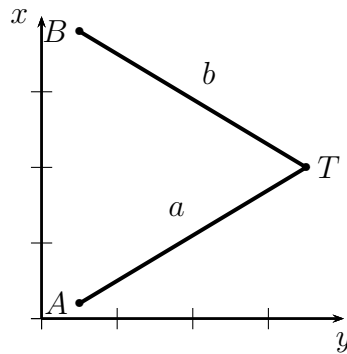
REŠITEV: $v_{\Delta y_A} = v_{\Delta x_A} = -2.0 \text{ cm}$, $v_{\Delta y_B} = v_{\Delta x_B} = 8.0 \text{ cm}$, $y_T = 3.48 \text{ m}$, $y_T = 2.07 \text{ m}$.

14. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (10.0 \text{ m}, 10.0 \text{ m})$ in $A(y_A, x_A) = (10.0 \text{ m}, 100.0 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo merili dve dolžini, in sicer $a = 60.1 \text{ m}$ in $b = 60.2 \text{ m}$. Če sta opazovanji različne natančnosti ($\sigma_a = 1 \text{ dm}$, $\sigma_b = 1.5 \text{ dm}$) in med seboj korelirani ($\rho_{ab} = 0.1$), določite koordinato x_T , če vemo, da je koordinata y_T enaka 50.0 m .

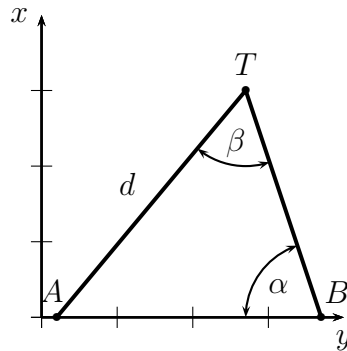
REŠITEV: $v_a = 3.76 \text{ cm}$, $v_b = 7.84 \text{ cm}$, $x_T = 54.9058 \text{ m}$.

15. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$. Med točko A in novo točko T smo izmerili dolžino $d = 75.00 \text{ m}$, na točki T kot $\beta = 87^\circ$ in na točki B kot $\alpha = 56^\circ$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T .

REŠITEV: $v_d = -0.11 \text{ mm}$, $v_\alpha = 19.26'$, $v_\beta = -1.50'$, $y_T = 70.130 \text{ m}$, $x_T = 44.826 \text{ m}$.

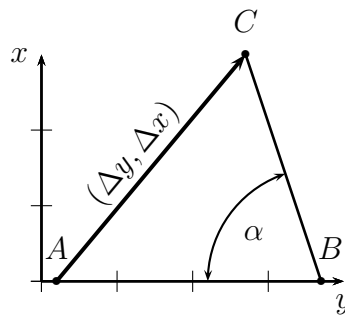


Slika 1-11: Naloga 14



Slika 1-12: Naloga 15

16. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0 \text{ m}, 45.0 \text{ m})$, na točki B pa kot $\alpha = 56^\circ$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T .



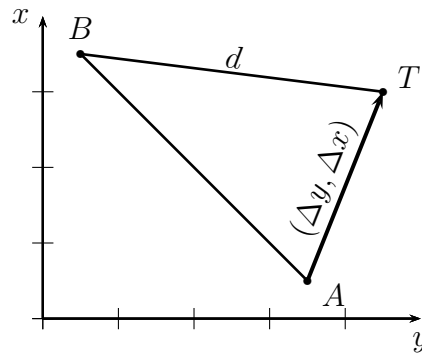
Slika 1-13: Naloga 16

REŠITEV: $v_{\Delta y} = v_{\Delta x} = 0.0 \text{ mm}$, $v_\alpha = 18.74'$, $y_T = 70.000 \text{ m}$, $x_T = 45.000 \text{ m}$.

17. V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (123.0 \text{ m}, 95.0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (95.0 \text{ m}, 123.0 \text{ m})$. Da bi določili položaj točke T smo s točke A opazovali bazni vektor $(\Delta y, \Delta x) = (12.15 \text{ m}, 25.95 \text{ m})$, s točke B pa smo opazovali dolžino $d = 40.00 \text{ m}$. Če sta komponenti baznega vektorja opazovani dvakrat bolj natančno kot dolžina, določi koordinate točke $T(y_T, x_T)$ z izravnavo po MNK.

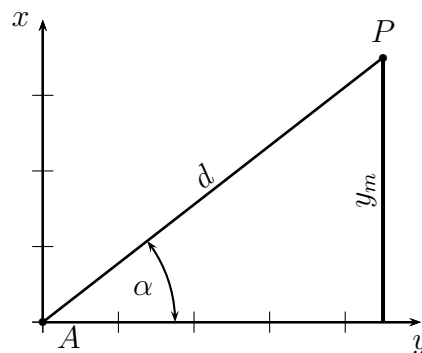
REŠITEV: $v_{\Delta y} = -4.0 \text{ cm}$, $v_{\Delta x} = 0.2 \text{ cm}$, $v_d = 16.2 \text{ cm}$, $y_T = 135.110 \text{ m}$, $x_T = 120.952 \text{ m}$.

18. Od Točke $A(y_A, x_A) = (0.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$ smo izmerili dolžino $d = 5.1 \text{ m}$ proti točki P . Izmerjen kot med absciso in izmerjeno dolžino znaša $\alpha = 53^\circ 8'$. Izmerili smo še ordinato točke P , ki znaša



Slika 1-14: Naloga 17

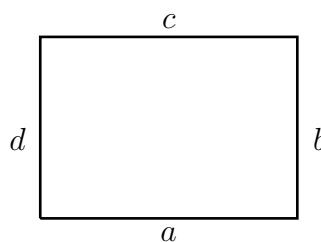
$y_m = 4.0$ m. Izravnaj opazovanja, ki so različne natančnosti, vendar neodvisna $\sigma_d = 3$ cm, $\sigma_{y_m} = 2$ cm in $\sigma_\alpha = 15''$.



Slika 1-15: Naloga 18

REŠITEV: $v_d = -5.4$ cm, $v_{y_m} = 3.0$ cm, $v_\alpha = -0.3''$, $y_P = 3.037$ m, $x_P = 4.03$ m.

19. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15,0$ m, $b = 10,0$ m, $c = 14,9$ m in $d = 10,1$ m. Izravnaj opazovanja in določi površino pravokotnika S . Posredno izravnavo reši tako, da za neznanki nastavite S in a .



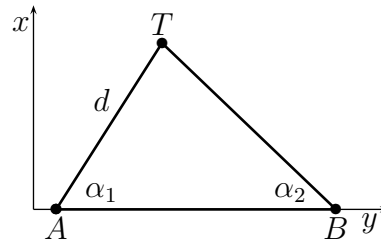
Slika 1-16: Naloga 19

REŠITEV: $v_a = -5.0$ cm, $v_b = 5.0$ cm, $v_c = -5.0$ cm, $v_d = 5.0$ cm, $S = 150.25$ m².

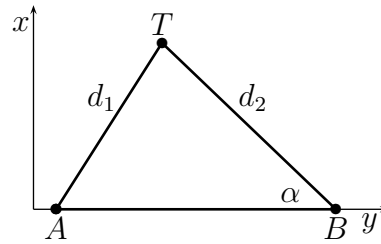
20. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžino $d = 64.0$ m in dva kota, $\alpha_1 = 50^\circ 42'$ ter $\alpha_2 = 45^\circ$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T .

REŠITEV: $v_d = 0.0$ cm, $v_{\alpha_1} = 11.3''$, $v_{\alpha_2} = 128.4''$, $y_T = 50.534$ m, $x_T = 49.528$ m.

21. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžini $d_1 = 64.0$ m in $d_2 = 70.0$ m ter kot $\alpha = 45^\circ 0' 0''$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T .



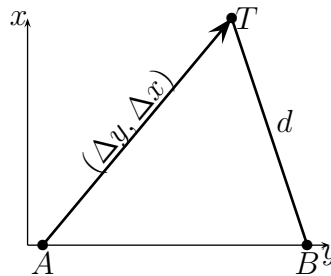
Slika 1-17: Naloga 20



Slika 1-18: Naloga 21

REŠITEV: $v_{d_1} = v_{d_2} = 0.0$ cm, $v_\alpha = 128.4''$, $y_T = 50.533$ m, $x_T = 49.528$ m.

22. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0 \text{ m}, 45.0 \text{ m})$, s točke B pa dolžino $d = 54.0$ m. Če so natančnosti opazovanj dane kot: $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1$ dm in $\sigma_d = 5$ cm, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T .



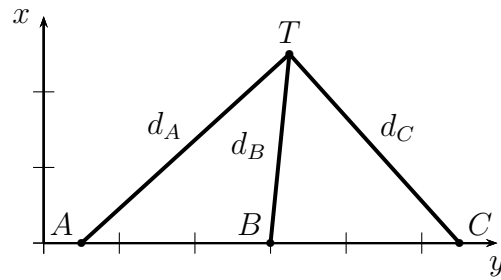
Slika 1-19: Naloga 22

REŠITEV: $v_{\Delta y} = 3.7$ cm, $v_{\Delta x} = -5.5$ cm, $v_d = 1.7$ cm, $y_T = 70.037$ m, $x_T = 44.945$ m.

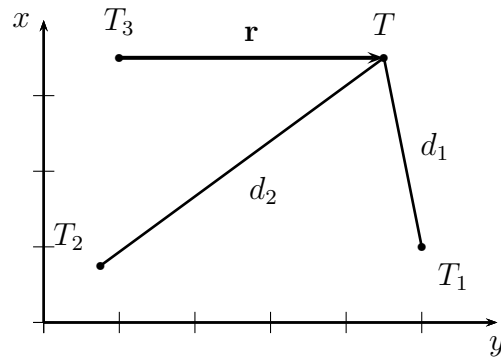
23. S treh danih točk ($A(y_A, x_A) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$, $B(y_B, x_B) = (50 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $C(y_C, x_C) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$) smo izmerili tri dolžine $d_A = 70.7$ m, $d_B = 50.1$ m in $d_C = 70.7$ m do nove točke $T(y_T, x_T)$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T , če so a) opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana in če so b) različne natančnosti, $\sigma_{d_A} : \sigma_{d_B} : \sigma_{d_C} = 1 : 1 : 2$. (Razmislite, kako bi sestavili pogojno enačbo pri pogojni izravnavi?).

REŠITEV: a) $v_{d_A} = 4.1$ cm, $v_{d_B} = -5.8$ cm, $v_{d_C} = 4.1$ cm, $y_T = 50.000$ m, $x_T = 50.043$ m in b) $v_{d_A} = 2.3$ cm, $v_{d_B} = -3.3$ cm, $v_{d_C} = 9.3$ cm, $y_T = 49.951$ m, $x_T = 50.067$ m.

24. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer $T_1 = (80 \text{ m}, 20 \text{ m})$, $T_2 = (10 \text{ m}, 10 \text{ m})$ in $T_3 = (20 \text{ m}, 80 \text{ m})$, kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžini $d_1 = 60.8$ m, $d_2 = 92.2$ m ($\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2$ cm) in vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (50 \text{ m}, 0 \text{ m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1$ cm, $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T .



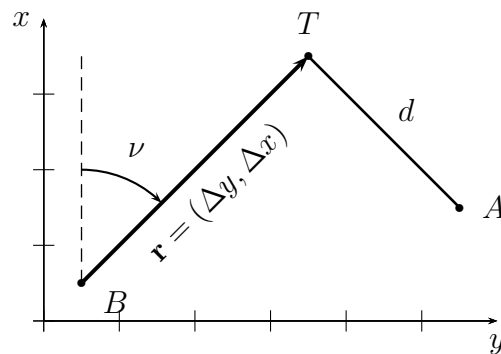
Slika 1-20: Naloga 23



Slika 1-21: Naloga 24

REŠITEV: $v_{d_1} = 2.42 \text{ cm}$, $v_{d_2} = -0.73 \text{ cm}$, $v_{\Delta y} = -0.01 \text{ cm}$, $v_{\Delta x} = -0.35 \text{ cm}$, $y_T = 70.000 \text{ m}$, $x_T = 79.997 \text{ m}$.

25. Podane imamo koordinate dveh točk, in sicer $A(80 \text{ m}, 20 \text{ m})$ in $B(10 \text{ m}, 10 \text{ m})$, kot prikazuje spodnja slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžino $d = 60.80 \text{ m}$ ($\sigma_d = 2 \text{ cm}$), vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (60.00 \text{ m}, 70.00 \text{ m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1 \text{ cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = -0.25$) in smerni kot $\nu = 40^\circ 35'$ ($\sigma_\nu = 1'$). Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$.



Slika 1-22: Naloga 25

REŠITEV: $v_{\Delta y} = -0.13 \text{ cm}$, $v_{\Delta x} = 0.29 \text{ cm}$, $v_d = 2.50 \text{ cm}$, $v_\nu = 66.8''$, $y_T = 69.9987 \text{ m}$, $x_T = 79.997 \text{ m}$.