

*Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo*  
*Študijski program 1. stopnje*  
*Geodetsko inženirstvo in upravljanje nepremičnin, 1. letnik*

# **ANALIZA OPAZOVANJ V GEODEZIJI 1 - VAJE**

## **Primeri računskih nalog z rešitvami**

**Primeri računskih nalog z rešitvami**

*Oskar Sterle, 2025*  
*Različica: 11. februar 2026*

# Kazalo vsebine

Kazalo vsebine	i
Kazalo slik	ii
Kazalo preglednic	iii
1 Dodatni primeri izravnave	1

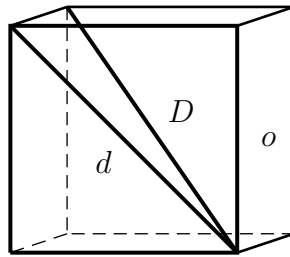
## Kazalo slik

1-1 Naloga 1 . . . . .	1
1-2 Naloga 2 . . . . .	1
1-3 Naloga 3 . . . . .	1
1-4 Naloga 4 . . . . .	2
1-5 Naloga 5 . . . . .	2
1-6 Naloga 6 . . . . .	2
1-7 Naloga 10 . . . . .	3
1-8 Naloga 11 . . . . .	3
1-9 Naloga 12 . . . . .	4
1-10 Naloga 13 . . . . .	4
1-11 Naloga 14 . . . . .	4
1-12 Naloga 15 . . . . .	5
1-13 Naloga 16 . . . . .	5
1-14 Naloga 17 . . . . .	6
1-15 Naloga 18 . . . . .	6
1-16 Naloga 19 . . . . .	7
1-17 Naloga 20 . . . . .	7
1-18 Naloga 21 . . . . .	8
1-19 Naloga 22 . . . . .	8
1-20 Naloga 23 . . . . .	8
1-21 Naloga 24 . . . . .	8
1-22 Naloga 25 . . . . .	8

# Kazalo preglednic

# 1 Dodatni primeri izravnave

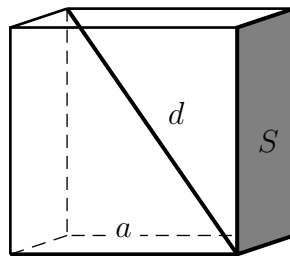
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ( $d = 14,0$  m), prostorsko diagonalo ( $D = 17,0$  m) in obseg osnovne ploskve ( $o = 40,0$  m). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonali ( $d$  in  $D$ ) korelirani, saj velja  $\rho_{dD} = -0.5$ . Izračunaj velikost osnovne ploskve  $a$  in njeno natančnost  $\sigma_a$ . Izračunaj tudi prostornino kocke  $V$  in njeno natančnost  $\sigma_V$ .



Slika 1-1: Naloga 1

**REŠITEV:**  $a = 9,943$  m,  $v_d = 6,2$  cm,  $v_D = 22,2$  cm,  $v_o = -22,7$  cm,  $V = 983,03$  m<sup>3</sup>.

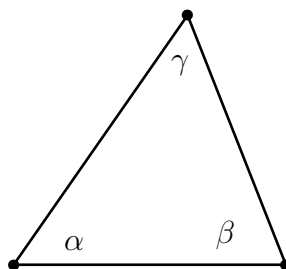
2. V kocki smo opazovali: stranico  $a = 10,1$  m ( $\sigma_a = 0,1$  m), prostorsko diagonalo  $d = 17,4$  m ( $\sigma_d = 0,15$  m) in površino osnovne ploskve  $S = 99,5$  m<sup>2</sup> ( $\sigma_S = 0,7$  m<sup>2</sup>). Izravnajte opazovanja in določite velikost kocke.



Slika 1-2: Naloga 2

**REŠITEV:**  $\hat{a} = 9,996$  m,  $\hat{d} = 17,314$  m,  $\hat{S} = 99,913$  m<sup>2</sup>.

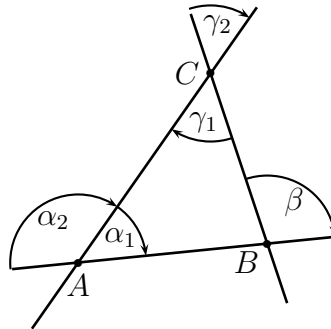
3. V trikotniku smo izmerili vse tri kote in dobili  $\alpha = 64^\circ 33'$ ,  $\beta = 60^\circ 30'$  in  $\gamma = 55^\circ 0'$ . Če so opazovanja različne natančnosti ( $\sigma_\alpha = 1'$ ,  $\sigma_\beta = 2'$  in  $\sigma_\gamma = 2'$ ), izravnaj opazovanja po MNK.



Slika 1-3: Naloga 3

**REŠITEV:**  $\hat{\alpha} = 64^{\circ}32'40''$ ,  $\hat{\beta} = 60^{\circ}28'40''$ ,  $\hat{\gamma} = 54^{\circ}58'40''$ .

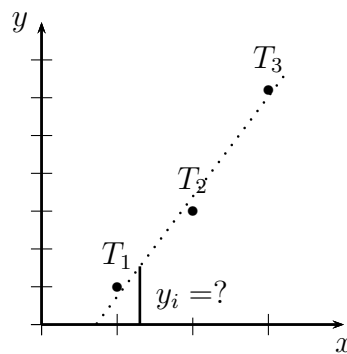
4. Med tremi premicami, ki s presečišči sestavijo trikotnik (glej sliko) smo izmerili 5 kotov, in sicer  $\alpha_1 = 50^{\circ}$ ,  $\alpha_2 = 131^{\circ}$ ,  $\beta = 106^{\circ}$ ,  $\gamma_1 = 55^{\circ}$ ,  $\gamma_2 = 53^{\circ}$ . Če je kot  $\beta$  izmerjen dvakrat bolj natančno od ostalih kotov, s posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1-4: Naloga 4

**REŠITEV:**  $\hat{\alpha}_1 = 50^{\circ}30'$ ,  $\hat{\alpha}_2 = 129^{\circ}30'$ ,  $\hat{\beta} = 105^{\circ}30'$ ,  $\hat{\gamma}_1 = 55^{\circ}0'$ ,  $\hat{\gamma}_2 = 55^{\circ}0'$ .

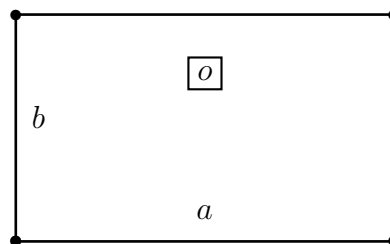
5. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate  $y$  (koordinate  $x$  so dane) in dobili:  $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$ ,  $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$  in  $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$ . Če so opazovanja enake natančnosti, s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra  $a$  in  $b$ ), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate  $y_i$  pri vrednosti koordinate  $x_i = 1.3$ .



Slika 1-5: Naloga 5

**REŠITEV:**  $a = 2,05$ ,  $b = -1,067$ ,  $\hat{y}_1 = 0,983$ ,  $\hat{y}_2 = 3,033$ ,  $\hat{y}_3 = 5,083$ ,  $y_i = 1,5983$ .

6. Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici:  $a = 12,4$  m in  $b = 7,5$  m ter obseg  $o = 40,0$  m. Če so opazovanja različne natančnosti ( $\sigma_a = \sigma_b = 1$  dm,  $\sigma_o = 2$  dm) in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.



Slika 1-6: Naloga 6

**REŠITEV:**  $v_a = v_b = 3,33$  cm,  $v_o = -6,67$  cm,  $S = 93,664$  m<sup>2</sup>.

7. Nalogo 5 reši tako, da predpostaviš, da je prosti člen  $b = -1.0$ .

**REŠITEV:**  $a = 2,02$ ,  $\hat{y}_1 = 1,021$ ,  $\hat{y}_2 = 3,043$ ,  $\hat{y}_3 = 5,064$ ,  $y_i = 1,628$ .

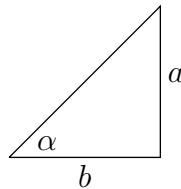
8. Nalogo 5 reši tako, da so opazovane koordinate  $x$ , medtem ko so koordinate  $y$  dane. Kako bi to nalogo lahko rešili najbolj enostavno?

**REŠITEV:**  $a = 2,05$ ,  $b = -1,067$ ,  $\hat{x}_1 = 1,008$ ,  $\hat{x}_2 = 1,984$ ,  $\hat{x}_3 = 3,008$ ,  $y_i = 1,598$ .

9. V kroglu smo izmerili polmer  $R = 3,65$  m ( $\sigma_R = 3$  cm), premer  $D = 7,1$  m ( $\sigma_D = 3$  cm), površino  $A = 158,4$  m<sup>2</sup> ( $\sigma_A = 0,12$  m<sup>2</sup>) in prostornino  $V = 187,5$  m<sup>3</sup> ( $\sigma_V = 0,15$  m<sup>3</sup>). Izravnajte opazovanja s posredno in pogojno izravnavo po MNK.

**REŠITEV:**  $\hat{R} = 3,5528$  m,  $\hat{D} = 7,1057$  m,  $\hat{A} = 158,5034$  m<sup>2</sup>,  $\hat{V} = 187,4243$  m<sup>3</sup>.

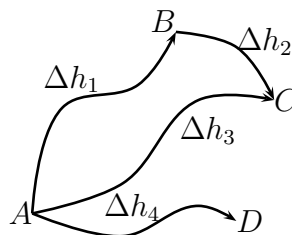
10. V pravokotnem trikotniku smo izmerili:  $a = 10,0$  m,  $b = 15,0$  m, in  $\alpha = 30^\circ$ . Če so natančnosti opazovanj dane kot  $\sigma_a = 1$  cm,  $\sigma_b = 2$  cm in  $\sigma_\alpha = 30'$ , izravnaj opazovanja in določi površino trikotnika  $S$ .



Slika 1-7: Naloga 10

**REŠITEV:**  $v_a = -0,44$  cm,  $v_b = 1,01$  cm,  $v_\alpha = 3,81^\circ$ ,  $S = 75,018$  m<sup>2</sup>.

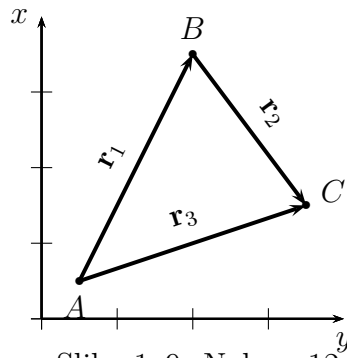
11. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper  $A$  dano višino  $H_A = 10,0$  m. Izmerili smo 4 višinske razlike s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij:  $\Delta h_1 = -1,01$  m ( $d_1 = 50$  m),  $\Delta h_2 = 0,73$  m ( $d_2 = 20$  m),  $\Delta h_3 = -0,25$  m ( $d_3 = 50$  m) in  $\Delta h_4 = 0,12$  m ( $d_4 = 50$  m). Izravnaj opazovanja in določi višine reperjev  $B$ ,  $C$  in  $D$ .



Slika 1-8: Naloga 11

**REŠITEV:**  $v_1 = 1,25$  cm,  $v_2 = 0,50$  cm,  $v_3 = -1,25$  cm,  $v_4 = 0,0$  cm,  $H_B = 9,0025$  m,  $H_C = 9,7375$  m,  $H_D = 10,12$  m.

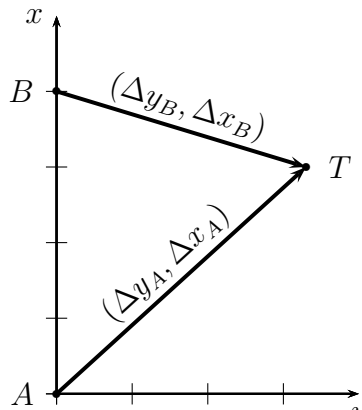
12. Podano imamo eno točko, in sicer  $A(y_A, x_A) = (10,0$  m,  $10,0$  m). Za določitev koordinat dveh novih točk  $B(y_B, x_B)$  in  $C(y_C, x_C)$  smo izmerili tri vektorje  $\mathbf{r}_1 = (\Delta y_1, \Delta x_1) = (70,1$  m,  $89,8$  m),  $\mathbf{r}_2 = (\Delta y_2, \Delta x_2) = (69,8$  m,  $-69,9$  m) in  $\mathbf{r}_3 = (\Delta y_3, \Delta x_3) = (140,2$  m,  $19,7$  m). Če so komponente vektorja  $\mathbf{r}_3$  določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$ , izravnajte opazovanja in določite koordinate točk  $B$  in  $C$ .



Slika 1-9: Naloga 12

**REŠITEV:**  $v_{\Delta y_1} = 13,33 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta x_1} = -8,89 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta y_2} = 13,33 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta x_2} = -8,89 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta y_3} = -3,33 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta x_3} = 2,22 \text{ cm}$ ,  $y_B = 80,233 \text{ m}$ ,  $y_B = 99,711 \text{ m}$ ,  $y_C = 150,167 \text{ m}$ ,  $y_C = 29,722 \text{ m}$ , .

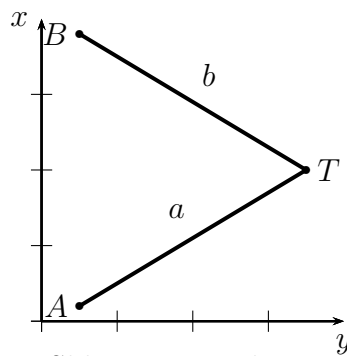
13. Podani imamo točki  $A(y_A, x_A) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (0 \text{ m}, 5 \text{ m})$ . Do nove točke  $T(y_T, x_T)$  smo izmerili dva bazna vektorja;  $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3,5 \text{ m}, 2,1 \text{ m})$  in  $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3,4 \text{ m}, -3,0 \text{ m})$ . Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke  $T$ , če je bazni vektor s točke  $A$  določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke  $B$ .



Slika 1-10: Naloga 13

**REŠITEV:**  $v_{\Delta y_A} = v_{\Delta x_A} = -2,0 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta y_B} = v_{\Delta x_B} = 8,0 \text{ cm}$ ,  $y_T = 3,48 \text{ m}$ ,  $y_T = 2,07 \text{ m}$ .

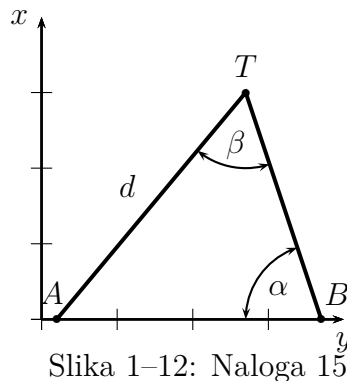
14. Podani imamo točki  $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 10,0 \text{ m})$  in  $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 100,0 \text{ m})$ . Do nove točke  $T(y_T, x_T)$  smo merili dve dolžini, in sicer  $a = 60,1 \text{ m}$  in  $b = 60,2 \text{ m}$ . Če sta opazovanji različne natančnosti ( $\sigma_a = 1 \text{ dm}$ ,  $\sigma_b = 1,5 \text{ dm}$ ) in med seboj korelirani ( $\rho_{ab} = 0.1$ ), določite koordinato  $x_T$ , če vemo, da je koordinata  $y_T$  enaka  $50,0 \text{ m}$ .



Slika 1-11: Naloga 14

**REŠITEV:**  $v_a = 3,76 \text{ cm}$ ,  $v_b = 7,84 \text{ cm}$ ,  $x_T = 54,9058 \text{ m}$ .

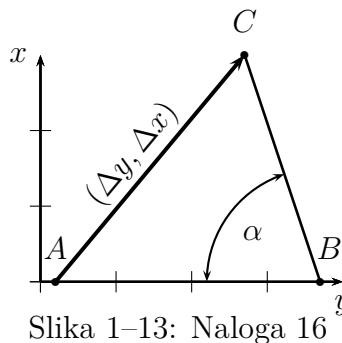
15. Dani sta dve točki:  $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (100,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$ . Med točko  $A$  in novo točko  $T$  smo izmerili dolžino  $d = 75,00 \text{ m}$ , na točki  $T$  kot  $\beta = 87^\circ$  in na točki  $B$  kot  $\alpha = 56^\circ$ . Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke  $T$ .



Slika 1–12: Naloga 15

**REŠITEV:**  $v_d = -0,11 \text{ mm}$ ,  $v_\alpha = 19,26'$ ,  $v_\beta = -1,50'$ ,  $y_T = 70,130 \text{ m}$ ,  $x_T = 44,826 \text{ m}$ .

16. Dani sta dve točki:  $A(y_A, x_A) = (10,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (100,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$ . S točke  $A$  smo do nove točke  $T$  izmerili bazni vektor GNSS  $(\Delta y, \Delta x) = (60,0 \text{ m}, 45,0 \text{ m})$ , na točki  $B$  pa kot  $\alpha = 56^\circ$ . Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke  $T$ .



Slika 1–13: Naloga 16

**REŠITEV:**  $v_{\Delta y} = v_{\Delta x} = 0,0 \text{ mm}$ ,  $v_\alpha = 18,74'$ ,  $y_T = 70,000 \text{ m}$ ,  $x_T = 45,000 \text{ m}$ .

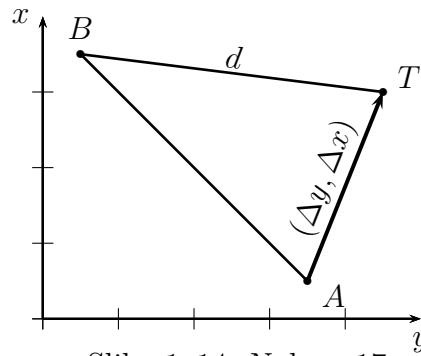
17. V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk,  $A(y_A, x_A) = (123,0 \text{ m}, 95,0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (95,0 \text{ m}, 123,0 \text{ m})$ . Da bi določili položaj točke  $T$  smo s točke  $A$  opazovali bazni vektor  $(\Delta y, \Delta x) = (12,15 \text{ m}, 25,95 \text{ m})$ , s točke  $B$  pa smo opazovali dolžino  $d = 40,00 \text{ m}$ . Če sta komponenti baznega vektorja opazovani dvakrat bolj natančno kot dolžina, določi koordinate točke  $T(y_T, x_T)$  z izravnavo po MNK.

**REŠITEV:**  $v_{\Delta y} = -4,0 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta x} = 0,2 \text{ cm}$ ,  $v_d = 16,2 \text{ cm}$ ,  $y_T = 135,110 \text{ m}$ ,  $x_T = 120,952 \text{ m}$ .

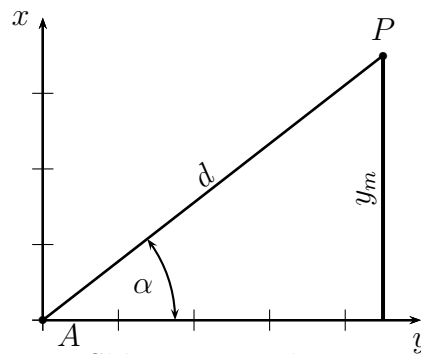
18. Od Točke  $A(y_A, x_A) = (0,0 \text{ m}, 0,0 \text{ m})$  smo izmerili dolžino  $d = 5,1 \text{ m}$  proti točki  $P$ . Izmerjen kot med absciso in izmerjeno dolžino znaša  $\alpha = 53^\circ 8'$ . Izmerili smo še ordinato točke  $P$ , ki znaša  $y_m = 4,0 \text{ m}$ . Izravnaj opazovanja, ki so različne natančnosti, vendar neodvisna  $\sigma_d = 3 \text{ cm}$ ,  $\sigma_{y_m} = 2 \text{ cm}$  in  $\sigma_\alpha = 15''$ .

**REŠITEV:**  $v_d = -5,4 \text{ cm}$ ,  $v_{y_m} = 3,0 \text{ cm}$ ,  $v_\alpha = -0,3''$ ,  $y_P = 3,037 \text{ m}$ ,  $x_P = 4,03 \text{ m}$ .

19. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili:  $a = 15,0 \text{ m}$ ,  $b = 10,0 \text{ m}$ ,  $c = 14,9 \text{ m}$  in  $d = 10,1 \text{ m}$ . Izravnaj opazovanja in določi površino pravokotnika  $S$ . Posredno izravnavo reši tako, da za neznanki nastavite  $S$  in  $a$ .



Slika 1-14: Naloga 17



Slika 1-15: Naloga 18

**REŠITEV:**  $v_a = -5,0$  cm,  $v_b = 5,0$  cm,  $v_c = -5,0$  cm,  $v_d = 5,0$  cm,  $S = 150,25$  m<sup>2</sup>.

20. Dani sta dve točki, in sicer  $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$ . Do nove točke  $T(y_T, x_T)$  smo izmerili dolžino  $d = 64,0$  m in dva kota,  $\alpha_1 = 50^\circ 42'$  ter  $\alpha_2 = 45^\circ$ . Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke  $T$ .

**REŠITEV:**  $v_d = 0,0$  cm,  $v_{\alpha_1} = 11,3''$ ,  $v_{\alpha_2} = 128,4''$ ,  $y_T = 50,534$  m,  $x_T = 49,528$  m.

21. Dani sta dve točki, in sicer  $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$ . Do nove točke  $T(y_T, x_T)$  smo izmerili dolžini  $d_1 = 64,0$  m in  $d_2 = 70,0$  m ter kot  $\alpha = 45^\circ$ . Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke  $T$ .

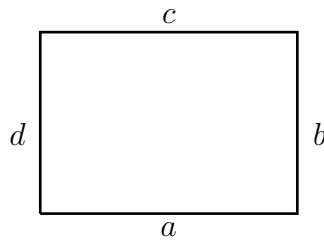
**REŠITEV:**  $v_{d_1} = v_{d_2} = 0,0$  cm,  $v_\alpha = 128,4''$ ,  $y_T = 50,533$  m,  $x_T = 49,528$  m.

22. Dani sta dve točki:  $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$  in  $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$ . S točke  $A$  smo do nove točke  $T$  izmerili bazni vektor GNSS  $(\Delta y, \Delta x) = (60,0 \text{ m}, 45,0 \text{ m})$ , s točke  $B$  pa dolžino  $d = 54,0$  m. Če so natančnosti opazovanj dane kot:  $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1$  dm in  $\sigma_d = 5$  cm, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke  $T$ .

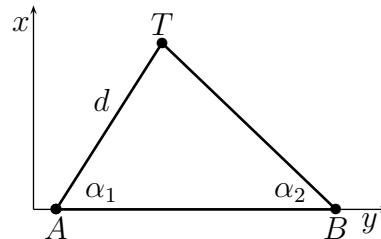
**REŠITEV:**  $v_{\Delta y} = 3,7$  cm,  $v_{\Delta x} = -5,5$  cm,  $v_d = 1,7$  cm,  $y_T = 70,037$  m,  $x_T = 44,945$  m.

23. S treh danih točk ( $A(y_A, x_A) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$ ,  $B(y_B, x_B) = (50 \text{ m}, 0 \text{ m})$  in  $C(y_C, x_C) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$ ) smo izmerili tri dolžine  $d_A = 70,7$  m,  $d_B = 50,1$  m in  $d_C = 70,7$  m do nove točke  $T(y_T, x_T)$ . Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke  $T$ , če so a) opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana in če so b) različne natančnosti,  $\sigma_{d_A} : \sigma_{d_B} : \sigma_{d_C} = 1 : 1 : 2$ . (Razmislite, kako bi sestavili pogojno enačbo pri pogojni izravnavi?).

**REŠITEV:** a)  $v_{d_A} = 4,1$  cm,  $v_{d_B} = -5,8$  cm,  $v_{d_C} = 4,1$  cm,  $y_T = 50,000$  m,  $x_T = 50,043$  m in b)  $v_{d_A} = 2,3$  cm,  $v_{d_B} = -3,3$  cm,  $v_{d_C} = 9,3$  cm,  $y_T = 49,951$  m,  $x_T = 50,067$  m.



Slika 1-16: Naloga 19



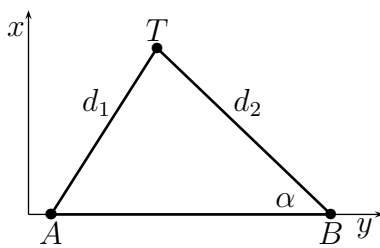
Slika 1-17: Naloga 20

24. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer  $T_1=(80 \text{ m}, 20 \text{ m})$ ,  $T_2=(10 \text{ m}, 10 \text{ m})$  in  $T_3=(20 \text{ m}, 80 \text{ m})$ , kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke  $T(y_T, x_T)$  smo opazovali dolžini  $d_1 = 60,8 \text{ m}$ ,  $d_2 = 92,2 \text{ m}$  ( $\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2 \text{ cm}$ ) in vektor  $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (50 \text{ m}, 0 \text{ m})$  ( $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1 \text{ cm}$ ,  $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$ ). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke  $T$ .

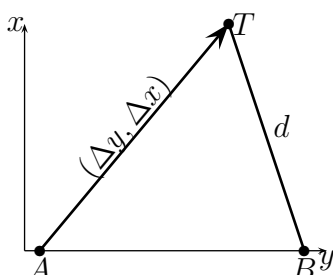
**REŠITEV:**  $v_{d_1} = 2,42 \text{ cm}$ ,  $v_{d_2} = -0,73 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta y} = -0,01 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta x} = -0,35 \text{ cm}$ ,  $y_T = 70,000 \text{ m}$ ,  $x_T = 79,997 \text{ m}$ .

25. Podane imamo koordinate dveh točk, in sicer  $A(80 \text{ m}, 20 \text{ m})$  in  $B(10 \text{ m}, 10 \text{ m})$ , kot prikazuje spodnja slika. Da bi določili koordinate nove točke  $T(y_T, x_T)$  smo opazovali dolžino  $d = 60,80 \text{ m}$  ( $\sigma_d = 2 \text{ cm}$ ), vektor  $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (60,00 \text{ m}, 70,00 \text{ m})$  ( $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1 \text{ cm}$ ,  $\rho_{\Delta y \Delta x} = -0,25$ ) in smerni kot  $\nu = 40^\circ 35'$  ( $\sigma_\nu = 1'$ ). Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke  $T(y_T, x_T)$ .

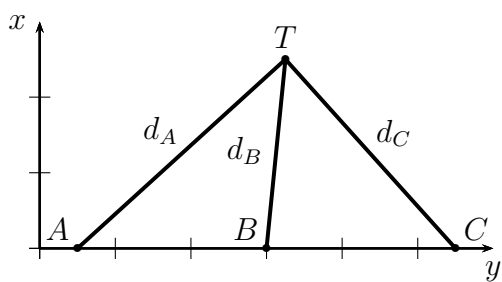
**REŠITEV:**  $v_{\Delta y} = -0,13 \text{ cm}$ ,  $v_{\Delta x} = 0,29 \text{ cm}$ ,  $v_d = 2,50 \text{ cm}$ ,  $v_\nu = 66,8''$ ,  $y_T = 69,9987 \text{ m}$ ,  $x_T = 79,997 \text{ m}$ .



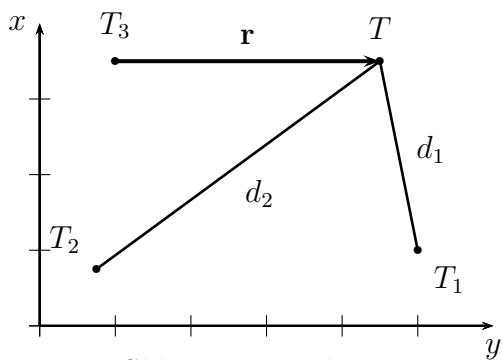
Slika 1-18: Naloga 21



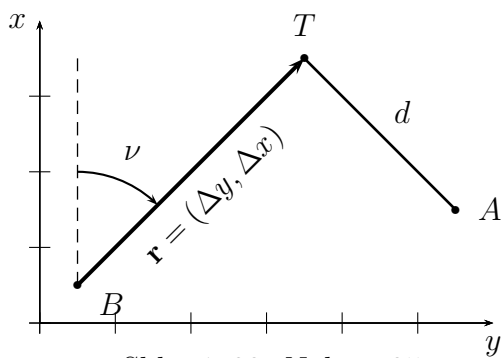
Slika 1-19: Naloga 22



Slika 1-20: Naloga 23



Slika 1-21: Naloga 24



Slika 1-22: Naloga 25