1 POGOJNA IZRAVNAVA PO MNK

Na enak način, kot lahko poenostavimo in posplošimo posredno metodo MNK, naredimo tudi z direktno metodo. Rezultat je pogojna izravnava po MNK. In tudi tu bo **posplošitev** dana z dejstvom, da enakovredno lahko rešujemo tako linearne kot tudi nelinearne probleme, kakor bo tudi **poenostavitev** dana z dejstvom, da vse probleme rešimo po enakem postopku - matrično.
Tudi pri pogojni izravnavi po MNK bomo vse količine vodili v vektorski obliki. Imeli bomo vektor opazovanj $\mathbf{l}$, vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$, vsi vektorji pa so velikosti $n \times 1$. Vektorju opazovanj pripada variančno-kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$, s pomočjo katere na osnovi izbrane referenčne variance a-priori σ_0^2 izračunamo matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in naknadno še matriko uteži $\mathbf{P}$. Vse matrike stohastičnega modela so velikosti $n \times n$.

1.1 Pogojne enačbe

Pri pogojni izravnavi moramo sestaviti r pogojnih enačb, povedano drugače, vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča podati en pogoj, ki mu morajo opazovanja zadostiti. Pogojne enačbe imajo enako vlogo (in obliko) kot pogojne enačbe pri direktni metodi MNK. V splošnem bodo pogojne enačbe nelinearne, zapisali pa jih bomo tako, da se vsi elementi pogojnih enačb nahajajo le na levi strani enačaja, na desni strani ostane samo še vrednost 0. Tudi tu bomo videli, da ta pogoj ni nujen, a nam bo olajšal izračun pravih predznakov parcialnih odvodov v nadaljevanju. Pogojne enačbe imajo obliko:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv g_1(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \\ F_2 &\equiv g_2(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \\ F_3 &\equiv g_3(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \\ &\vdots \qquad \vdots \\ F_r &\equiv g_r(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Pravila za sestavo pogojnih enačb so povsem enaka kot pri direktni metodi MNK (glej datoteko *MNK_SistemEnacb.pdf*), enačbe vsebujejo le izravnana opazovanja in konstante, v vseh enačbah moramo uporabiti vsa opazovanja[1]. Število opazovanj v posamezni pogojni enačbi je poljubno in je odvisno od oblike enačbe (funkcionalnega modela). Za rešitev pogojne izravnave po MNK, moramo nelinearne pogojne enačbe prvo pretvoriti v sistem linearnih enačb na osnovi postopka linearizacije.

1.2 Linearizacija pogojnih enačb

Ker so pogojne enačbe v enačbah 1 nelinearne, jih lineariziramo. Razlogi za prehod v linearno obliko so povsem enaki, kot pri posredni izravnavi po MNK (glej datoteko *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*).

[1] Sedaj že vemo, da obstajajo primeri, ko nekaterih opazovanj ne moremo uporabiti v pogojnih enačbah. To bomo pojasnili pri posebnih primerih

Za prehod v linearno obliko, bomo spet uporabili Taylorjevo vrsto. V pogojnih enačbah nastopajo izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, za katera pa vemo, da so vsota $\hat{l}_i = l_i + v_i$, torej vsota merjenih vrednosti opazovanj in njihovih popravkov. Pogojne enačbe zato razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli merjenih vrednosti opazovanj l_i, kjer prirastek opazovanj predstavljajo ravno popravki opazovanj v_i, pri tem pa zanemarimo člene s potencami popravkov 2 in več. Poljubna (i-ta) pogojna enačba se linearizira na sledeč način:

$$F_i \equiv g_i(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\partial F_i}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F_i}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial l_n} v_n = 0 \tag{2}$$

Enačbo 2 bomo preuredili tako, da bomo na levi strani pustili tiste količine, ki jih ne poznamo (so rezultat pogojne izravnave), to so popravki opazovanj, na desno stran pa bomo dali vse ostalo kar poznamo ali lahko izračunamo, to so opazovanja in/ali izračunane funkcije (g_i) na osnovi merjenih vrednosti opazovanj. Preurejena linearizirana pogojna enačba je oblike:

$$F_i \equiv \frac{\partial F_i}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F_i}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial l_n} v_n = -g_i(l_1, l_2, \ldots, l_n) \tag{3}$$

Enačba 3 je linearna, saj so popravki opazovanj pomnoženi le s konstantami (parcialni odvodi $\frac{\partial F_i}{\partial l_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ so izračunani iz merjenih vrednosti opazovanj in so konstante). Enačbo zapišemo v matrični obliki, isto pa naredimo tudi za vse ostale linearizirane pogojne enačbe iz 1 in dobimo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial l_1} & \frac{\partial F_1}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial l_1} & \frac{\partial F_2}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial l_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial l_1} & \frac{\partial F_i}{\partial l_2} & \ddots & \frac{\partial F_i}{\partial l_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial l_1} & \frac{\partial F_r}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial l_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix} \tag{4}$$

Matrično enačbo 4 lahko v krajši obliki, z ustreznimi oznakami matrik, zapišemo kot:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{5}$$

V enačbi 5 sta dva elementa, ki ju je potrebno še definirati, in sicer:

A matrika koeficientov (parcialnih odvodov) pogojnih enačb, izračunana iz merjenih vrednosti opazovanj, velikosti $r \times n$, in

f vektor odstopanj (prostih členov) pogojnih enačb, velikosti $r \times 1$.

Glede na obliko elementov vektorja **f** iz enačbe 3 vidimo, da so odstopanja pogojnih enačb ravno negativne vrednosti funkcij g_i, izračunane iz merjenih vrednosti opazovanj, torej $f_i = -g_i$.

1.3 Rešitev pogojne izravnave po MNK

Za pridobitev rešitve pogojne izravnave po MNK, izhajamo iz osnovnega matričnega modela pogojne izravnave iz enačbe 5, kar predstavlja funkcionalni model pogojne izravnave. Vendar matrična enačba iz 5 ni enolično rešljiva, saj predstavlja r enačb, v kateri nastopa n popravkov (seveda $r < n$). Takemu sistemo rečemo pod-določen sistem. Dodaten pogoj, ki nam bo podal enolično rešitev je pogoj metode najmanjših kvadratov, predstavljen v karakteristični funkciji Φ:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} \Rightarrow \min. \tag{6}$$

kjer dodatno velja enačba 5. Karakteristična funkcija, ki bo upoštevala pogoj 6 in 5 ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{f}\right) \Rightarrow \min. \tag{7}$$

V enačbi 7 vektor $\mathbf{k}$ označimo kot **vektor korelat** in vsebuje r Lagrangejevih multiplikatorjev, za vsako pogojno enačbo en multiplikator[2]. Ekstrem funkcije 7 bomo dobili takrat, ko bomo rešili dva sistema:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = 0 \tag{8}$$

Rešitev pogojne izravnave, oziroma rešitev matričnih sistemov 8 je podan z nizom matričnih enačb. Prvo izračunamo **matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj** $\mathbf{Q}_e$ in **matriko uteži ekvivalentnih enačb/opazovanj** $\mathbf{P}_e$, obe velikosti $r \times r$:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} \tag{9}$$

Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} \tag{10}$$

Iz česar izračunamo rešitev pogojne izravnave oz. funkcionalnega modela pogojne izravnave, to sta vektorja:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{11}$$

Iz enačb izračuna funkcionalnega modela pogojne izravnave 9, 10 in 11 vidimo, da v enačbah nastopa matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in ne matrika uteži opazovanj $\mathbf{P}$.

1.4 Postopek izvedbe pogojne izravnave po MNK

Postopek reševanja nalog s pogojno izravnavo poteka zelo podobno kot postopek pri direktni metodi MNK, le da bomo tu izračune delali v matrični obliki. V nadaljevanju so predstavljeni koraki pogojne izravnave.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.

[2] Lagrangejeve multiplikatorje boste podrobno spoznali pri matematiki, ko boste obravnavali vezan ekstrem funkcije več spremenljivk

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe. Pravila za sestavo pogojnih enačb so podana v dokumentu *MNK_SistemEnacb.pdf*. Dodatno pravilo, ki je pri pogojni izravnavi zelo pomembno pa je, da so pogojne enačbe sestavljene tako, da se celotna enačba nahaja le na levi strani enačaja. Desna stran naj ima samo še vrednost 0.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$. Izračunamo vse parcialne odvode in tako nastavimo matriko $\mathbf{A}$. Izračunamo vsa odstopanja pogojnih enačb in nastavimo vektor $\mathbf{f}$.

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.

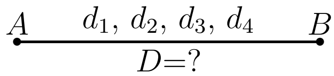
7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave. Drugo iteracijo naredimo tako, da za merjene vrednosti opazovanj $\mathbf{l}$ uporabimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ in postopek ponovimo, od alineje 3 naprej.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem. Pri pogojni izravnavi je to pogosto, saj nas v večini primerov izravnana opazovanja sama po sebi ne zanimajo, ampak izvedene količine (koordinate, višine, površine...)

1.5 Primer rešitve s pogojno izravnavo – dolžina D merjena štirikrat

Določiti želimo razdaljo D med točkama A in B, zato smo z merskim trakom dolžino izmerili štirikrat, kot prikazuje slika 1. Opazovanja, ki smo jih dobili so: $d_1 = 32.51$ m, $d_2 = 32.48$ m, $d_3 = 32.52$ m in $d_4 = 32.53$ m.



Slika 1: Prikaz izmerjenih dolžin med točkama A in B

Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi vrednost neznane dolžine D.

Primer bomo s pogojno izravnavo rešili po korakih, ki so predstavljeni v poglavju 1.4.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Glede na podatke naloge, vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanih dolžin, kjer bi za

enolično določitev dolžine D potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje. Število nadštevilnih opazovanj je tako $r = 3$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ ima obliko:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.48\,\mathrm{m} \\ 32.52\,\mathrm{m} \\ 32.53\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, je matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ enotska matrika, velikosti 4×4.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb, ki jih moramo nastaviti je enako $r = 3$, v katerih lahko nastopajo le (izravnana) opazovanja (in konstante), v vseh pogojnih enačbah pa moramo uporabiti vsa opazovanja. Pogoj, iz katerega izhajamo je:

$$D = \hat{d}_1 = \hat{d}_2 = \hat{d}_3 = \hat{d}_4 \tag{13}$$

   Enačbo 13 uporabimo za sestavo pogojnih enačb, ki imajo obliko:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_2 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{d}_3 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d}_4 - \hat{d}_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

   Kot smo pokazali že pri direktni metodi MNK (glej rešen primer po direktni metodi v datoteki *MNK_SistemEnacb.pdf*), to ni edini niz pogojnih enačb, a vsebujejo vse informacije, ki jih potrebujemo za izvedbo pogojne izravnave.

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 12 obliko:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 3×4. Število vrstic je enako številu enačb (3), medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj (4). Matrika vsebuje parcialne odvode, kjer vsako pogojno enačbo iz enačbe 14 odvajamo po vseh opazovanjih, po vrstnem redu iz vektorja opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 12. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_1} & \frac{\partial F_1}{\partial d_2} & \frac{\partial F_1}{\partial d_3} & \frac{\partial F_1}{\partial d_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial d_1} & \frac{\partial F_2}{\partial d_2} & \frac{\partial F_2}{\partial d_3} & \frac{\partial F_2}{\partial d_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial d_1} & \frac{\partial F_3}{\partial d_2} & \frac{\partial F_3}{\partial d_3} & \frac{\partial F_3}{\partial d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 3×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 14 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(d_2 - d_1) \\ -(d_3 - d_1) \\ -(d_4 - d_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.01\,\mathrm{m} \\ -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{17}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 3×3. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \tag{19}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 3×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.01\,\mathrm{m} \\ -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{20}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0.00\,\mathrm{m} \\ 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.01\,\mathrm{m} \\ -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{21}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 12 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 21:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{22}$$

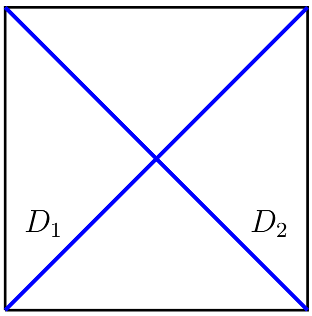
8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Primer je linearen in enostaven, zato ni potrebno po izvajanju še ene iteracije.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Končen rezultat je izračun neznane dolžine D, ki jo dobimo iz pogoja v enačbi 13 in izravnanih opazovanj iz enačbe 22. Dobimo:

$$D = \hat{d}_1 = \hat{d}_2 = \hat{d}_3 = \hat{d}_4 = 32.51\,\mathrm{m} \tag{23}$$

1.6 Primer rešitve s pogojno izravnavo – Diagonala kvadrata merjena dvakrat

V kvadratu smo izmerili diagonalo dvakrat, kot prikazuje slika 2, in dobili $D_1 = 5.2\,\mathrm{m}$ ter $D_2 = 5.1\,\mathrm{m}$.



Slika 2: Skica kvadrata in opazovanih diagonal v kvadratu

Če so opazovanja različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$, in medseboj nekorelirana, s pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja. Izračunaj tudi velikost stranice a in površino S kvadrata.

Rešitev dobimo po postopku iz poglavja 1.4.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz navodil vidimo, da imamo $n = 2$ opazovani diagonali, kjer bi za enolično določitev velikosti kvadrata potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje. Število nadštevilnih opazovanj je tako $r = 1$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ ima obliko:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2\,\mathrm{m} \\ 5.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{24}$$

   Ker so opazovanja različne natančnosti, moramo prvo sestaviti kovariančno matriko opazovanj $\boldsymbol{\Sigma}$, ki je velikosti 2×2 in ima obliko:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0.04\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Pri pogojni izravnavi uporabljamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, zato bomo izbrali tako referenčno varianco a-priori σ_0^2, da bodo vrednosti v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ sama cela števila (najmanjša možna). Izberemo si:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 0.01\,\mathrm{m}^2 \tag{26}$$

Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ dobimo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{27}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb, ki jih moramo nastaviti je enako $r = 1$, v katerih lahko nastopajo le (izravnana) opazovanja (in konstante), v vseh pogojnih enačbah pa moramo uporabiti vsa opazovanja. Pogoj, iz katerega izhajamo je:

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{28}$$

Enačbo 28 uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki ima obliko:

$$F_1 \equiv \hat{D}_1 - \hat{D}_2 = 0 \tag{29}$$

V pogojni enačbi 29 smo, glede na enačbo 28, vse elemente dali na levo stran.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 24 obliko:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Matrika koeficientov / parcialnih odvodov enačb popravkov po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×2. Število vrstic je enako številu enačb (1), medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj (2). Matrika vsebuje parcialne odvode, kjer vsako pogojno enačbo iz enačbe 14 odvajamo po vseh opazovanjih, po vrstnem redu iz vektorja opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 24. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial D_1} & \frac{\partial F_1}{\partial D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 29 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - D_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{32}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), samo še izračunamo rešitve izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:
$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \tag{33}$$
   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:
$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0.20 \end{bmatrix} \tag{34}$$
5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:
$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{35}$$
6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:
$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -0.02\,\mathrm{m} \\ 0.08\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{36}$$
7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 24 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 36:
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5.18\,\mathrm{m} \\ 5.18\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{37}$$
8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Primer je linearen in enostaven, zato ni potrebno po izvajanju še ene iteracije.
9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu lahko izračunamo še stranico kvadrata a, kjer izhajamo iz izravnanih opazovanj v enačbi 37:
$$a = \frac{\hat{D}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{D}_2}{\sqrt{2}} = 3.663\,\mathrm{m} \tag{38}$$
   in še površino kvadrata S:
$$S = a^2 = \frac{\hat{D}_1^2}{2} = \frac{\hat{D}_2^2}{2} = 13.4162\,\mathrm{m}^2 \tag{39}$$