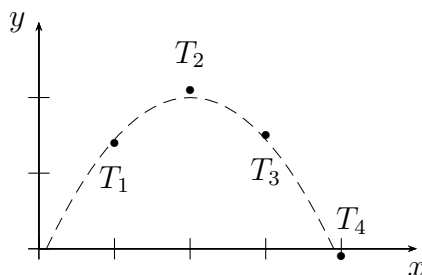


Pogojna izravnava po MNK – Točke na paraboli:

V ravnini smo izmerili koordinate y štirim točkam in dobili: $T_1(1, 1.4)$, $T_2(2, 2.1)$, $T_3(3, 1.5)$ in $T_4(4, -0.1)$, koordinate x točk obravnavamo kot konstante. S pogojno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite parametre parabole, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke [PosrednaIzravnavaMNK.pdf](#). Posvetili pa se bomo nastavitvi pogojne enačbe.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Podatki naloge kažejo, da imamo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži \mathbf{Q} enaka:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.

Število pogojnih enačb je torej $r = \underline{\quad}$, v katerih lahko nastopajo le izravnana opazovanja, \hat{y}_i , in konstante, x_i , $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Ugotoviti moramo, kakšnemu pogoju morajo opazovanja in konstante zadoščati, da bodo opisovali parabolo. Sestavimo prvo enačbo parabole, ki povezujejo izravnana opazovanja in konstante:

$$\begin{aligned} F_1 : \hat{y}_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ F_2 : \hat{y}_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ F_3 : \hat{y}_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \\ F_4 : \hat{y}_4 &= ax_4^2 + bx_4 + c \end{aligned} \quad (3)$$

V enačbi 3 vidimo, da imamo prvič 4 enačbe, v katerih pa nastopajo koeficienti parabole a , b in c , ki v pogojni enačbi ne smejo nastopati. Do rešitve bomo prišli tako, da bomo iz enačb 3 korak po koraku eliminirali posamezne koeficiente. Začnemo tako, da eliminiramo prosti člen c . Naredimo zaporedne razlike med enačbami:

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 : \hat{y}_2 - \hat{y}_1 &= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ F_3 - F_2 : \hat{y}_3 - \hat{y}_2 &= a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2) \\ F_4 - F_3 : \hat{y}_4 - \hat{y}_3 &= a(x_4^2 - x_3^2) + b(x_4 - x_3) \end{aligned} \quad (4)$$

V enačbah 4 vse tri dobljene enačbe delimo tako, da bomo imeli na desni člen b prost:

$$\begin{aligned} \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} : \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} &= a(x_2 + x_1) + b \\ \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} : \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} &= a(x_3 + x_2) + b \\ \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} : \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{x_4 - x_3} &= a(x_4 + x_3) + b \end{aligned} \quad (5)$$

Sedaj bomo eliminirali parameter b , in sicer spet z zaporednimi razlikami:

$$\begin{aligned} \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} - \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} : \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} &= a(x_3 - x_1) \\ \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} - \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} : \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{x_4 - x_3} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} &= a(x_4 - x_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Obe enačbi 6 delimo tako, da bomo osamili parameter a . Dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{F_3 - F_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{F_2 - F_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}}{\frac{F_4 - F_3}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{F_3 - F_2}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)}} : \frac{\frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}}{\frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)}} &= a \end{aligned} \quad (7)$$

Končen korak je samo še, da enačbi 7 izenačimo in vse elemente damo na levo stran enačaja. Dobimo končno obliko pogojne enačbe:

$$F \equiv \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} + \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = 0 \quad (8)$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.

Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih \mathbf{A} je velikosti $_ \times _$. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev

enako številu opazovanj. Parcialni odvodi pa so enaki:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y_1} &= -\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} &= \frac{1}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} + \frac{1}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3} &= -\frac{1}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{1}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} - \frac{1}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} \\ \frac{\partial F}{\partial y_4} &= \frac{1}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)}\end{aligned}\quad (9)$$

Matrika \mathbf{A} ima glede na parcialne odvode iz enačbe 9 obliko:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} & \frac{\partial F}{\partial y_3} & \frac{\partial F}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ & _ \end{bmatrix} \quad (10)$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb \mathbf{f} je velikosti $_ \times _$, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojni enačbi iz 8 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} _ \end{bmatrix} \quad (11)$$

4. **Izračunamo matriko kofaktorjev \mathbf{Q}_e in matriko uteži \mathbf{P}_e ekvivalentnih enačb/opazovanj.** Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko \mathbf{A} in vektor \mathbf{f}) in stohastični model pogojne izravnave (matriko \mathbf{Q}), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj \mathbf{Q}_e , ki je velikosti $_ \times _$. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^T = \begin{bmatrix} _ \end{bmatrix} \quad (12)$$

Matriko uteži \mathbf{P}_e ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike \mathbf{Q}_e in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} _ \end{bmatrix} \quad (13)$$

5. **Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat \mathbf{k} .** Sledi izračun vektorja korelat \mathbf{k} , velikosti $_ \times _$, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e \mathbf{f} = \begin{bmatrix} _ \end{bmatrix} \quad (14)$$

6. **Izračunamo vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} .**

Na osnovi vektorja \mathbf{k} izračunamo popravke opazovanj, vektor \mathbf{v} , ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^T \mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix} \quad (15)$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj \mathbf{l} iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj \mathbf{v} iz enačbe 15:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad (16)$$

8. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.

Na koncu želimo zapisati enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam. A kako dobiti parametre parabole? Izhajali bomo iz vmesnih enačb izpeljave pogojne enačbe, to so enačbe 3 - 7. Za izračun parametra a bomo izhajali iz prve enačbe v 7, kjer dobimo:

$$a = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = \text{---} \quad (17)$$

Ko imamo izračunan parameter a , lahko sedaj izračunamo parameter b . Izhajamo iz prve enačbe v 5 in dobimo:

$$b = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} - a(x_2 + x_1) = \text{---} \quad (18)$$

Na koncu še iz prve enačbe iz 3 izračunamo parameter c :

$$c = \hat{y}_1 - ax_1^2 - bx_1 = \text{---} \quad (19)$$

Zapišimo samo še iskano enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam:

$$y = ax^2 + bx + c = \text{---}x^2 + \text{---}x + \text{---} \quad (20)$$