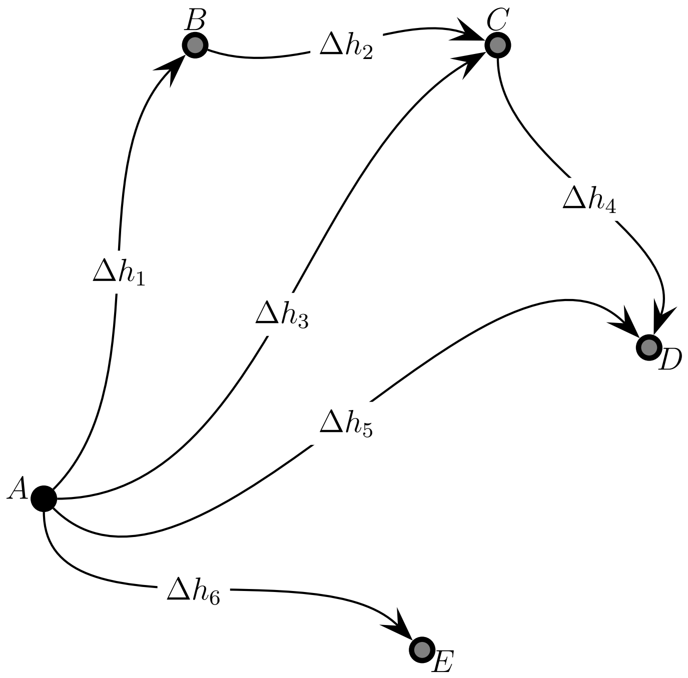
Pogojna izravnava po MNK – Višinska geodetska mreža:

V nivelmanski mreži, kjer je višina točke A dana ($H_A = 320.00\,\mathrm{m}$), smo opazovali višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij, kakor jih prikazuje slika 1. Numerične vrednosti opazovanj so podane v preglednici 1.

Tabela 1: Izmerjene vrednosti višinskih razlik med reperji

VIŠINSKA RAZLIKA	**DOLŽINA LINIJE**
$\Delta h_1 = 0.25\,\mathrm{m}$	$\overline{AB} = 10\,\mathrm{m}$
$\Delta h_2 = 0.30\,\mathrm{m}$	$\overline{BC} = 20\,\mathrm{m}$
$\Delta h_3 = 0.60\,\mathrm{m}$	$\overline{AC} = 40\,\mathrm{m}$
$\Delta h_4 = -0.15\,\mathrm{m}$	$\overline{CD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_5 = 0.40\,\mathrm{m}$	$\overline{AD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_6 = -0.15\,\mathrm{m}$	$\overline{AE} = 10\,\mathrm{m}$

S pogojno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite izravnane vrednosti višin reperjev B, C, D in E.



Slika 1: Opazovane višinske razlike v višinski geodetski mreži

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   V podani višinski mreži imamo opazovanih n = ___ višinskih razlik (opazovanj). Za enolično določitev višin novih reperjev potrebujemo n = ___, torej je število nadštevilnih opazovanj enako n = ___. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ je torej:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Ker imamo za vsako nivelmansko linijo podano dolžino te linije, so natančnosti opazovanj različne, uteži opazovanj pa so določene z:

$$p_i = \frac{1}{d_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{2}$$

   Pri pogojni izravnavi moramo sestaviti matriko kofaktorjev $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$, kofaktor posameznega opazovanja q_i je določen kot:

$$q_i = \frac{1}{p_i} = d_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{3}$$

   Za enostavnejši izračun matrik, bomo kofaktorje zapisali tako, da bodo cela števila in najnižja možna. Dolžine moramo zato deliti s faktorjem _, dobljeni kofaktorji vseh opazovanj pa so:

$$q_1 = \_\_ \quad q_2 = \_\_ \quad q_3 = \_\_ \quad q_4 = \_\_ \quad q_5 = \_\_ \quad q_6 = \_\_ \tag{4}$$

   Vrednosti iz enačbe 4 uporabimo za sestavo matrike $\mathbf{Q}$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej r = ___, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Pogoje, katerim morajo zadoščati opazovanja, določimo iz slike 1, dobimo pa jih tako, da zapiramo nivelmanske zanke. Primera dveh pogojnih enačb sta:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_2 - \Delta\hat{h}_3 = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta\hat{h}_3 + \Delta\hat{h}_4 - \Delta\hat{h}_5 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

   Iz enačb 5 je razvidno, da opazovanje Δh_6 v pogojnih enačbah ne nastopa. To v tem primeru ni napaka, saj ta višinska razlika ni vključena v nobeno zanko.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je

velikosti _ × _. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_3} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_4} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_5} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_3} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_4} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_5} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti _ × _, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 5 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(\Delta h_1 + \Delta h_2 - \Delta h_3) \\ -(\Delta h_3 + \Delta h_4 - \Delta h_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti _ × _. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti _ × _, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \\ \_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \end{bmatrix} \tag{11}$$

   V enačbi 11 se vidi, da je popravek za zadnjo višinsko v_6 enak 0.0 mm, saj ta višinska razlika ni nadštevilno opazovana.

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 11:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
Pri geometričnem nivelmanu so pogojne enačbe linearne, zato dodatne iteracije ni potrebno izvesti. Za kontrolo lahko v pogojne enačbe 5 vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe 12 in dobimo:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_2 - \Delta\hat{h}_3 &= 0.00\,\mathrm{mm} \\ \Delta\hat{h}_3 + \Delta\hat{h}_4 - \Delta\hat{h}_5 &= 0.00\,\mathrm{mm} \end{aligned} \tag{13}$$

Vidimo, da neskladja ni, izravnana opazovanja so povsem skladna, ponovne iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
Na koncu iz izravnanih opazovanj(enačba 12) in dane višine reperja A ($H_A = 320.00\,\mathrm{m}$) izračunamo še višine reperjev B, C, D in E:

$$\begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{14}$$