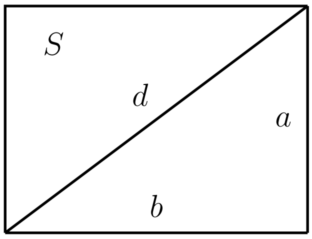
Pogojna izravnava po MNK – Opazovanja v pravokotniku:

V pravokotniku imamo merjene štiri količine, kakor prikazuje slika 1, in sicer stranico $a = 6.0\,\mathrm{m}$, stranico $b = 8.0\,\mathrm{m}$ in diagonalo $d = 10.1\,\mathrm{m}$. Dodatno smo izmerili tudi površino $S = 48.4\,\mathrm{m}^2$. Izravnajte opazovanja s pogojno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov, če so dolžinske količine merjene z natančnostjo $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_d = 1\,\mathrm{cm}$ in površina merjena z natančnostjo $\sigma_S = 10\,\mathrm{dm}^2$.



Slika 1: Skica pravokotnika z opazovanji

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz navodil vidimo, da imamo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ker so opazovanja različne natančnosti, moramo prvo sestaviti kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$, ki je velikosti _ × _ in ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

Pri pogojni izravnavi uporabljamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, zato bomo izbrali tako referenčno varianco a-priori σ_0^2, da bodo vrednosti v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ sama cela števila (najmanjša možna). Izberemo si:

$$\sigma_0^2 = \_\_ \tag{3}$$

Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ dobimo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = \_\_$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Primer pogojnih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}\hat{b} - \hat{S} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 obliko:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_d \\ v_S \end{bmatrix} \tag{6}$$

   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti $\_ \times \_$. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial d} & \frac{\partial F_1}{\partial S} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial d} & \frac{\partial F_2}{\partial S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti $\_ \times \_$, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 5 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(a^2 + b^2 - d^2) \\ -(ab - S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 \\ \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti $\_ \times \_$. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti $\_ \times \_$, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \\ \_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \_\,\mathrm{m} \\ \_\,\mathrm{m} \\ \_\,\mathrm{m} \\ \_\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 12:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\,\mathrm{m} \\ \_\_\,\mathrm{m} \\ \_\_\,\mathrm{m} \\ \_\_\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Ker so pogojne enačbe nelinearne, smo z linearizacijo povzročili neskladnost/napako v funkcionalnem modelu. Kakšno je to neskladje, lahko ugotovimo tako, da v enačbe popravkov 5 vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe 13 in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2 &= -0.0005\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{a}\hat{b} - \hat{S} &= 0.0011\,\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{14}$$

   Iz enačbe 14 je razvidno, da je skladnost izravnanih opazovanj visoka. Kako pa se to odraža na velikostih popravkov v 2. iteraciji? Če izravnana opazovanja iz enačbe 13 uporabimo kot merjene vrednosti in ponovimo pogojno izravnavo, dobimo sledeče popravke opazovanj:

$$\mathbf{v}_{2i} = \begin{bmatrix} -3.15 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\ -6.01 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \\ -5.02 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\ 7.66 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

   Popravki 2. iteracije iz enačbe 15 so dejansko zanemarljivi, zato druge iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Naloga ne zahteva nobenega dodatnega izračuna.