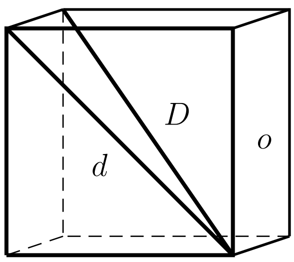
POSREDNA IN POGOJNA IZRAVNAVA

Reševanje nalog po metodi najmanjših kvadratov z uporabo matrik (posredna in pogojna izravnava) je možno za vse naloge, ki imajo nadštevilna opazovanja. Tako lahko rešite vse naloge, ki so bile podane pri poglavju Metoda najmanjših kvadratov (direktna in posredna metoda).

Vse spodaj podane naloge imajo na koncu zapisane tudi rešitve. Ko rešujete naloge sami in ne dobite točno take rešitve, kot se podana spodaj, je neskladje lahko zaradi drugačnih približnih vrednosti neznank ali pa tudi zaradi prenosa napak pri zaokroževanju. Če boste imeli težave, se posvetujte z asistentom.

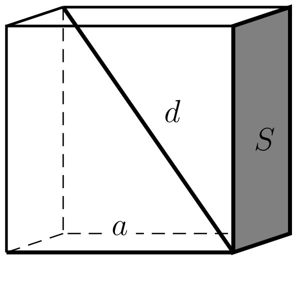
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14.0\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17.0\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40.0\,\mathrm{m}$). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonali (d in D) korelirani, saj velja $\rho_{dD} = -0.5$. Izračunaj velikost osnovne ploskve a in njeno natančnost σ_a. Izračunaj tudi prostornino kocke V in njeno natančnost σ_V.



Slika 1: Naloga 1

REŠITEV: $a = 9.943\,\mathrm{m}$, $v_d = 6.2\,\mathrm{cm}$, $v_D = 22.2\,\mathrm{cm}$, $v_o = -22.7\,\mathrm{cm}$, $V = 983.03\,\mathrm{m}^3$.

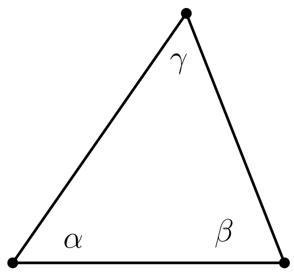
2. V kocki smo opazovali: stranico $a = 10.1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.1\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo $d = 17.4\,\mathrm{m}$ ($\sigma_d = 0.15\,\mathrm{m}$) in površino osnovne ploskve $S = 99.5\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_S = 0.7\,\mathrm{m}^2$). Izravnajte opazovanja in določite velikost kocke.



Slika 2: Naloga 2

REŠITEV: $\hat{a} = 9.996\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 17.314\,\mathrm{m}$, $\hat{S} = 99.913\,\mathrm{m}^2$.

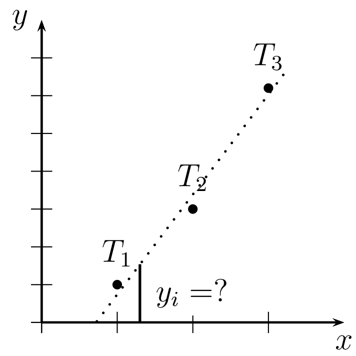
3. V trikotniku smo izmerili vse tri kote in dobili $\alpha = 64°33'$, $\beta = 60°30'$ in $\gamma = 55°0'$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_\alpha = 1'$, $\sigma_\beta = 2'$ in $\sigma_\gamma = 2'$), izravnaj opazovanja po MNK.



Slika 3: Naloga 3

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 64°32'40''$, $\hat{\beta} = 60°28'40''$, $\hat{\gamma} = 54°58'40''$.

4. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra a in b), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate y_i pri vrednosti koordinate $x_i = 1.3$.



Slika 4: Naloga 4

REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\hat{y}_1 = 0.983$, $\hat{y}_2 = 3.033$, $\hat{y}_3 = 5.083$, $y_i = 1.5983$.

5. Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici: $a = 12.4\,\mathrm{m}$ in $b = 7.5\,\mathrm{m}$ ter obseg $o = 40.0\,\mathrm{m}$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_a = \sigma_b = 1\,\mathrm{dm}$, $\sigma_o = 2\,\mathrm{dm}$) in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.

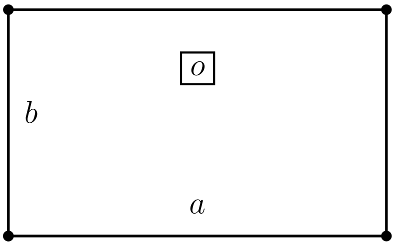
REŠITEV: $v_a = v_b = 3.33\,\mathrm{cm}$, $v_o = -6.67\,\mathrm{cm}$, $S = 93.664\,\mathrm{m}^2$.

6. Nalogo 4 reši tako, da predpostaviš, da je prosti člen $b = -1.0$.

REŠITEV: $a = 2.02$, $\hat{y}_1 = 1.021$, $\hat{y}_2 = 3.043$, $\hat{y}_3 = 5.064$, $y_i = 1.628$.

7. Nalogo 4 reši tako, da so opazovane koordinate x, medtem ko so koordinate y dane. Kako bi to nalogo lahko rešili najbolj enostavno?

REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\hat{x}_1 = 1.008$, $\hat{x}_2 = 1.984$, $\hat{x}_3 = 3.008$, $y_i = 1.598$.

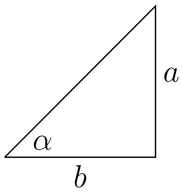


Slika 5: Naloga 5

8. V krogli smo izmerili polmer $R = 3.65\,\mathrm{m}$ ($\sigma_R = 3\,\mathrm{cm}$), premer $D = 7.1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_D = 3\,\mathrm{cm}$), površino $A = 158.4\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_A = 0.12\,\mathrm{m}^2$) in prostornino $V = 187.5\,\mathrm{m}^3$ ($\sigma_V = 0.15\,\mathrm{m}^3$). Izravnajte opazovanja s posredno in pogojno izravnavo po MNK.

   REŠITEV: $\hat{R} = 3.5528\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 7.1057\,\mathrm{m}$, $\hat{A} = 158.5034\,\mathrm{m}^2$, $\hat{V} = 187.4243\,\mathrm{m}^3$.

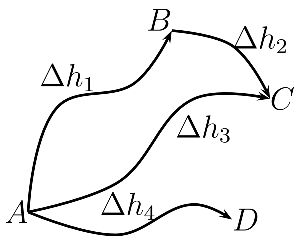
9. V pravokotnem trikotniku smo izmerili: $a = 10.0\,\mathrm{m}$, $b = 15.0\,\mathrm{m}$, in $\alpha = 30°$. Če so natančnosti opazovanj dane kot $\sigma_a = 1\,\mathrm{cm}$, $\sigma_b = 2\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_\alpha = 30'$, izravnaj opazovanja in določi površino trikotnika S.



Slika 6: Naloga 9

   REŠITEV: $v_a = -0.44\,\mathrm{cm}$, $v_b = 1.01\,\mathrm{cm}$, $v_\alpha = 3.81°$, $S = 75.018\,\mathrm{m}^2$.

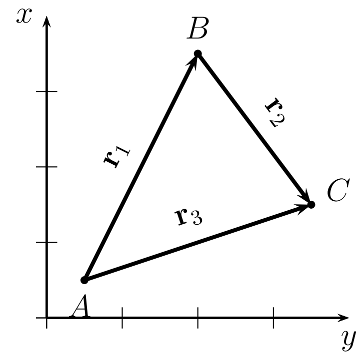
10. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper A dano višino $H_A = 10.0\,\mathrm{m}$. Izmerili smo 4 višinske razlike s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij: $\Delta h_1 = -1.01\,\mathrm{m}$ ($d_1 = 50\,\mathrm{m}$), $\Delta h_2 = 0.73\,\mathrm{m}$ ($d_2 = 20\,\mathrm{m}$), $\Delta h_3 = -0.25\,\mathrm{m}$ ($d_3 = 50\,\mathrm{m}$) in $\Delta h_4 = 0.12\,\mathrm{m}$ ($d_4 = 50\,\mathrm{m}$). Izravnaj opazovanja in določi višine reperjev B, C in D.



Slika 7: Naloga 10

   REŠITEV: $v_1 = 1.25\,\mathrm{cm}$, $v_b = 0.50\,\mathrm{cm}$, $v_3 = -1.25\,\mathrm{cm}$, $v_4 = 0.0\,\mathrm{cm}$, $H_B = 9.0025\,\mathrm{m}$, $H_C = 9.7375\,\mathrm{m}$, $H_D = 10.12\,\mathrm{m}$.

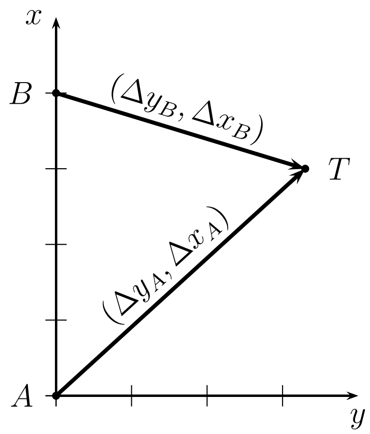
11. Podano imamo eno točko, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 10.0\,\mathrm{m})$. Za določitev koordinat dveh novih točk $B(y_B, x_B)$ in $C(y_C, x_C)$ smo izmerili tri vektorje $\mathbf{r}_1$=$(\Delta y_1, \Delta x_1)$ $= (70.1\,\mathrm{m}, 89.8\,\mathrm{m})$, $\mathbf{r}_2$=$(\Delta y_2, \Delta x_2)$=$(69.8\,\mathrm{m}, -69.9\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_3$=$(\Delta y_3, \Delta x_3)$=$(140.2\,\mathrm{m}, 19.7\,\mathrm{m})$. Če so komponente vektorja $\mathbf{r}_3$ določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, izravnajte opazovanja in določite koordinate točk B in C.



Slika 8: Naloga 11

REŠITEV: $v_{\Delta y_1} = 13.33\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x_1} = -8.89\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y_2} = 13.33\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x_2} = -8.89\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y_3} = -3.33\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x_3} = 2.22\,\mathrm{cm}$, $y_B = 80.233\,\mathrm{m}$, $y_B = 99.711\,\mathrm{m}$, $y_C = 150.167\,\mathrm{m}$, $y_C = 29.722\,\mathrm{m}$, .

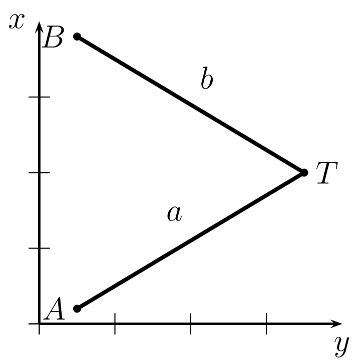
12. Podani imamo točki $A(y_A, x_A)$=$(0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B)$=$(0\,\mathrm{m}, 5\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja; $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3.5\,\mathrm{m}, 2.1\,\mathrm{m})$ in $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3.4\,\mathrm{m}, -3.0\,\mathrm{m})$. Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T, če je bazni vektor s točke A določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke B.



Slika 9: Naloga 12

REŠITEV: $v_{\Delta y_A} = v_{\Delta x_A} = -2.0\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y_B} = v_{\Delta c_B} = 8.0\,\mathrm{cm}$, $y_T = 3.48\,\mathrm{m}$, $y_T = 2.07\,\mathrm{m}$.

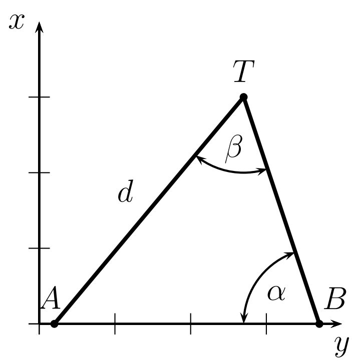
13. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 10.0\,\mathrm{m})$ in $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 100.0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo merili dve dolžini, in sicer $a = 60.1\,\mathrm{m}$ m in $b = 60.2\,\mathrm{m}$. Če sta opazovanji različne natančnosti ($\sigma_a = 1\,\mathrm{dm}$, $\sigma_b = 1.5\,\mathrm{dm}$) in med seboj korelirani ($\rho_{ab} = 0.1$), določite koordinato x_T, če vemo, da je koordinata y_T enaka $50.0\,\mathrm{m}$.



Slika 10: Naloga 13

REŠITEV: $v_a = 3.76\,\mathrm{cm}$, $v_b = 7.84\,\mathrm{cm}$, $x_T = 54.9058\,\mathrm{m}$.

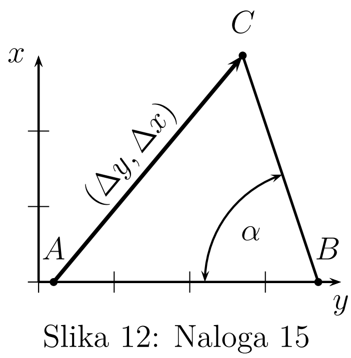
14. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$. Med točko A in novo točko T smo izmerili dolžino $d = 75.00\,\mathrm{m}$, na točki T kot $\beta = 87°$ in na točki B kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



Slika 11: Naloga 14

REŠITEV: $v_d = -0.11\,\mathrm{mm}$, $v_\alpha = 19.26'$, $v_\beta = -1.50'$, $y_T = 70.130\,\mathrm{m}$, $x_T = 44.826\,\mathrm{m}$.

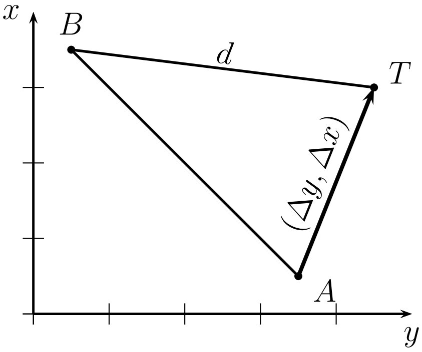
15. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0\,\mathrm{m}, 45.0\,\mathrm{m})$, na točki B pa kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



Slika 12: Naloga 15

REŠITEV: $v_{\Delta y} = v_{\Delta x} = 0.0\,\mathrm{mm}$, $v_\alpha = 18.74'$, $y_T = 70.000\,\mathrm{m}$, $x_T = 45.000\,\mathrm{m}$.

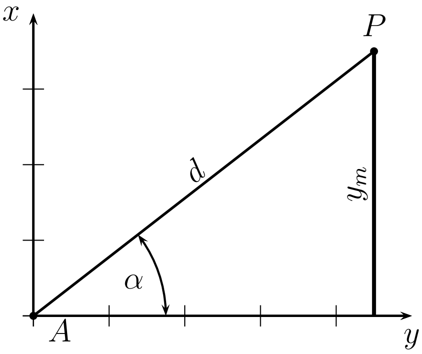
16. V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (123.0\,\mathrm{m}, 95.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (95.0\,\mathrm{m}, 123.0\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T smo s točke A opazovali bazni vektor $(\Delta y, \Delta x) = (12.15\,\mathrm{m}, 25.95\,\mathrm{m})$, s točke B pa smo opazovali dolžino $d = 40.00\,\mathrm{m}$. Če sta komponenti baznega vektorja opazovani dvakrat bolj natančno kot dolžina, določi koordinate točke $T(y_T, x_T)$ z izravnavo po MNK.



Slika 13: Naloga 16

REŠITEV: $v_{\Delta y} = -4.0\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x} = 0.2\,\mathrm{cm}$, $v_d = 16.2\,\mathrm{cm}$, $y_T = 135.110\,\mathrm{m}$, $x_T = 120.952\,\mathrm{m}$.

17. Od Točke $A(y_A, x_A) = (0.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ smo izmerili dolžino $d = 5.1\,\mathrm{m}$ proti točki P. Izmerjen kot med absciso in izmerjeno dolžino znaša $\alpha = 53°8'$. Izmerili smo še ordinato točke P, ki znaša $y_m = 4.0\,\mathrm{m}$. Izravnaj opazovanja, ki so različne natančnosti, vendar neodvisna $\sigma_d = 3\,\mathrm{cm}$, $\sigma_{y_m} = 2\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_\alpha = 15''$.



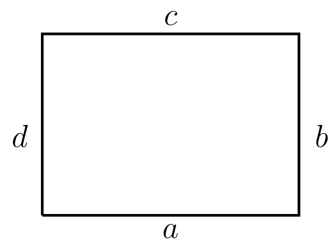
Slika 14: Naloga 17

REŠITEV: $v_d = -5.4\,\mathrm{cm}$, $v_{y_m} = 3.0\,\mathrm{cm}$, $v_\alpha = -0.3''$, $y_P = 3.037\,\mathrm{m}$, $x_P = 4.03\,\mathrm{m}$.

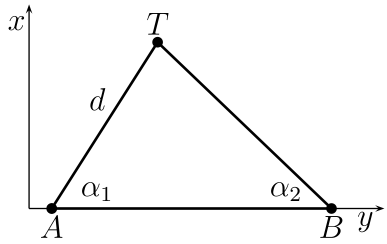
18. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15,0$ m, $b = 10,0$ m, $c = 14,9$ m in $d = 10,1$ m. Izravnaj opazovanja in določi površino pravokotnika S. Posredno izravnavo reši tako, da za neznanki nastavite S in a.

REŠITEV: $v_a = -5.0\,\mathrm{cm}$, $v_b = 5.0\,\mathrm{cm}$, $v_c = -5.0\,\mathrm{cm}$, $v_d = 5.0\,\mathrm{cm}$, $S = 150.25\,\mathrm{m}^2$.

19. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžino $d = 64.0\,\mathrm{m}$ in dva kota, $\alpha_1 = 50°42'$ ter $\alpha_2 = 45°$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



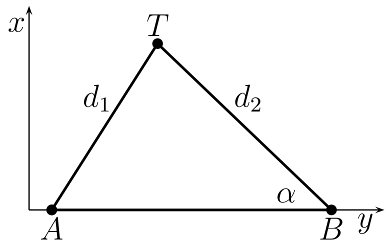
Slika 15: Naloga 18



Slika 16: Naloga 19

REŠITEV: $v_d = 0.0\,\text{cm}$, $v_{\alpha_1} = 11.3''$, $v_{\alpha_2} = 128.4''$, $y_T = 50.534\,\text{m}$, $x_T = 49.528\,\text{m}$.

20. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžini $d_1 = 64.0\,\text{m}$ in $d_2 = 70.0\,\text{m}$ ter kot $\alpha = 45°$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



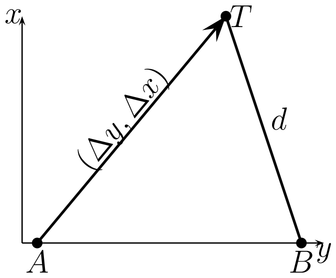
Slika 17: Naloga 20

REŠITEV: $v_{d_1} = v_{d_2} = 0.0\,\text{cm}$, $v_\alpha = 128.4''$, $y_T = 50.533\,\text{m}$, $x_T = 49.528\,\text{m}$.

21. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0\,\text{m}, 45.0\,\text{m})$, s točke B pa dolžino $d = 54.0\,\text{m}$. Če so natančnosti opazovanj dane kot: $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\text{dm}$ in $\sigma_d = 5\,\text{cm}$, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

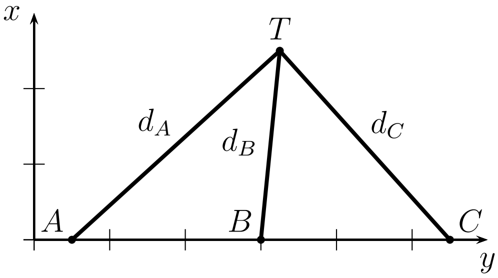
    REŠITEV: $v_{\Delta y} = 3.7\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = -5.5\,\text{cm}$, $v_d = 1.7\,\text{cm}$, $y_T = 70.037\,\text{m}$, $x_T = 44.945\,\text{m}$.

22. S treh danih točk ($A(y_A, x_A) = (0\,\text{m}, 0\,\text{m})$, $B(y_B, x_B) = (50\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $C(y_C, x_C) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$) smo izmerili tri dolžine $d_A = 70.7\,\text{m}$, $d_B = 50.1\,\text{m}$ in $d_C = 70.7\,\text{m}$ do nove točke $T(y_T, x_T)$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T, če so a) opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana in če so b) različne



Slika 18: Naloga 21

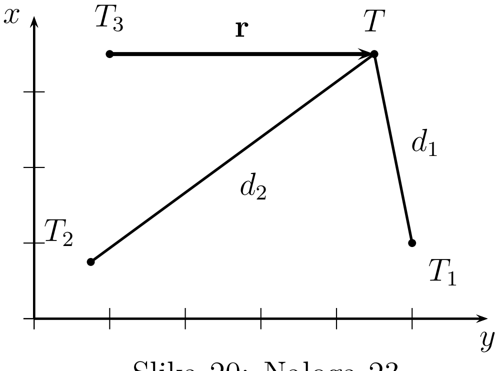
natančnosti, $\sigma_{d_A} : \sigma_{d_B} : \sigma_{d_C} = 1 : 1 : 2$. (Razmislite, kako bi sestavili pogojno enačbo pri pogojni izravnavi?).



Slika 19: Naloga 22

REŠITEV: a)$v_{d_A} = 4.1\,\mathrm{cm}$, $v_{d_B} = -5.8\,\mathrm{cm}$, $v_{d_C} = 4.1\,\mathrm{cm}$, $y_T = 50.000\,\mathrm{m}$, $x_T = 50.043\,\mathrm{m}$ in b) $v_{d_A} = 2.3\,\mathrm{cm}$, $v_{d_B} = -3.3\,\mathrm{cm}$, $v_{d_C} = 9.3\,\mathrm{cm}$, $y_T = 49.951\,\mathrm{m}$, $x_T = 50.067\,\mathrm{m}$.

23. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer T_1=(80 m, 20 m), T_2=(10 m, 10 m) in T_3=(20 m, 80 m), kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T,\, x_T)$ smo opazovali dolžini $d_1 = 60.8\,\mathrm{m}$, $d_2 = 92.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2\,\mathrm{cm}$) in vektor $\mathbf{r} = (\Delta y,\, \Delta x) = (50\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\mathrm{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T.

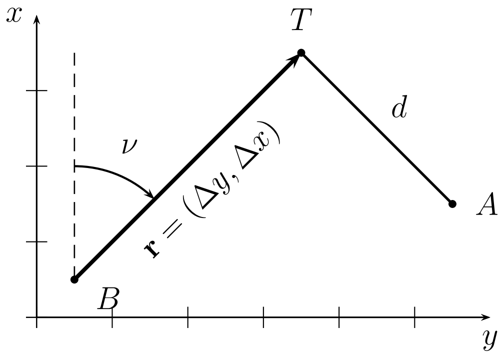


Slika 20: Naloga 23

REŠITEV: $v_{d_1} = 2.42\,\mathrm{cm}$, $v_{d_2} = -0.73\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y} = -0.01\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x} = -0.35\,\mathrm{cm}$, $y_T = 70.000\,\mathrm{m}$, $x_T = 79.997\,\mathrm{m}$.

24. Podane imamo koordinate dveh točk, in sicer $A(80\,\mathrm{m}, 20\,\mathrm{m})$ in $B(10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m})$, kot prikazuje spodnja slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžino $d = 60.80\,\mathrm{m}$ ($\sigma_d = 2\,\mathrm{cm}$), vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (60.00\,\mathrm{m}, 70.00\,\mathrm{m})$

($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\mathrm{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = -0.25$) in smerni kot $\nu = 40°35'$ ($\sigma_\nu = 1'$). Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$.



Slika 21: Naloga 24

REŠITEV: $v_{\Delta y} = -0.13\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x} = 0.29\,\mathrm{cm}$, $v_d = 2.50\,\mathrm{cm}$, $v_\nu = 66.8''$, $y_T = 69.9987\,\mathrm{m}$, $y_T = 79.997\,\mathrm{m}$.