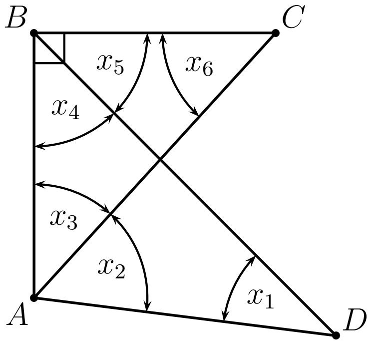
Posredna izravnava po MNK – Sistem kotov v triangulacijski shemi:

V triangulacijski shemi smo izmerili kote, kot to prikazuje slika 1, in dobili: $x_1 = 48.88°$, $x_2 = 42.10°$, $x_3 = 44.52°$, $x_4 = 43.80°$, $x_5 = 46.00°$ in $x_6 = 44.70°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in upoštevaj, da je na točki B pravi kot.



Slika 1: Koti v triangulacijski shemi med točkami A, B, C in D

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov naloge je razvidno, da imamo $n = \_\_$ opazovanj, to so koti v triangulacijski shemi med štirimi točkami A, B, C in D, kot to prikazuje slika 1. Vektor opazovanj zato sestavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, so vse uteži opazovanj enake in so:

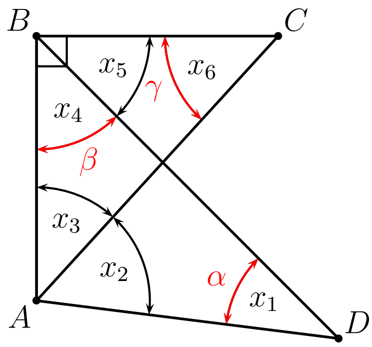
$$p_i = \_\_ \qquad i = \{1, \ldots, 6\} \tag{2}$$

   Zanima pa nas tu tudi, koliko ne n_0. Če pogledamo sliko 1, vidimo da imamo dva trikotnika, in sicer:

   - trikotnik ΔABC, ki je pravokotni trikotnik, zato v njem potrebujemo le en kot (x_3 ali x_6) in
   - trikotnik ΔABD, ki je splošni trikotnik, zato v njem potrebujemo dva kota (dva izmed kotov x_1, $x_2 + x_3$ in x_4).

Skupno torej velja, da je $n_0 =$ ___ in zato $r =$ ___.

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
Izbrati moramo $u = n_0 =$ ___ neznank. Izbrali si bomo $u = n_0 =$ ___ kote, in sicer iz trikotnika ΔABC bomo določili neznanko γ za kot x_6, medtem ko bomo pri trikotniku ΔABD določili α za kot x_1 in β za kot x_4. Izbiro prikazuje slika 2.



Slika 2: Izbira neznank pri obravnavani shemi kotov

Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Sestavimo $n =$ ___ enačb popravkov. V vsaki enačbi popravkov eno opazovanje povežemo z neznankami,n sledimo pravilu sestavljanja enačb popravkov in na koncu dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{x}_1 - \alpha = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{x}_2 + \alpha + \beta - \gamma - 90.00^\circ = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{x}_3 + \gamma - 90.00^\circ = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{x}_4 - \beta = 0 \\ F_5 &\equiv \hat{x}_5 + \beta - 90.00^\circ = 0 \\ F_6 &\equiv \hat{x}_6 - \gamma = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Enačbe popravkov iz 4 so zapisane tako, da vse nastopa na levi strani enačaja, na prvem mestu je izravnano opazovanje in samo eno opazovanje nastopa v posamezni enačbi poprevkov.

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
Približne vrednosti neznank pridobimo kar iz opazovanj, saj vidimo, da velja:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 4 odvajati po vseh neznankah iz 3, velikost matrike $\mathbf{B}$ pa je ___ × ___. Ker so enačbe popravkov linearne in enostavne, je matrika $\mathbf{B}$ enaka;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} & \frac{\partial F_4}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_5}{\partial \beta} & \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_6}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_6}{\partial \beta} & \frac{\partial F_6}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 4. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - x_1 \\ 90.00^\circ - \alpha_0 - \beta_0 + \gamma_0 - x_2 \\ 90.00^\circ - \gamma_0 - x_3 \\ \beta_0 - x_4 \\ 90.00^\circ - \beta_0 - x_5 \\ \gamma_0 - x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \\ \_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{7}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Ko imamo izračunani matriki $\mathbf{P}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$, lahko izračunamo sistem normalnih enačb. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti ___ × ___:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

Izračunamo še vektor $\mathbf{t}$, ki je velikosti ___ × ___:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ dobimo kot:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 5 izračunane iz opazovanj, končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \delta\alpha \\ \beta_0 + \delta\beta \\ \gamma_0 + \delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{12}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 11, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 6 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 7 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ v_{x_3} \\ v_{x_4} \\ v_{x_5} \\ v_{x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{13}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 13) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{14}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov linearne, ni potrebe po dodatnih iteracijah.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga ne zahteva nobenega dodatnega izračuna.