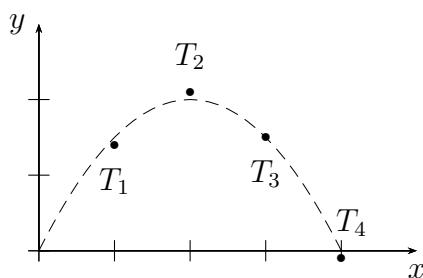


Posredna izravnava po MNK – Točke na paraboli:

V ravnini smo izmerili koordinate y štirim točkam in dobili: $T_1(1, 1.4)$, $T_2(2, 2.1)$, $T_3(3, 1.5)$ in $T_4(4, -0.1)$, koordinate x točk obravnavamo kot konstante. S posredno izravnavo po MNK določite parametre parabole tako, da gre parabola skozi izhodišče koordinatnega sistema in se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke [PosrednaIzravnavaMNK.pdf](#).

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Podatki naloge kažejo, da imamo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži \mathbf{P} enaka:

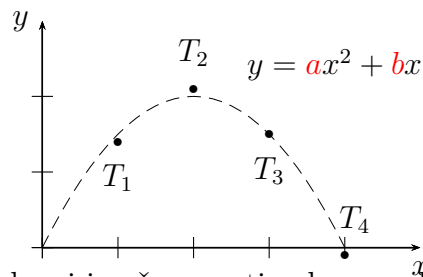
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank \mathbf{x} .

Izbrati moramo $u = n_0 = \underline{\quad}$ neznank. Ker naloga zahteva izračun parabole, ki se optimalno prilega točkam, pri tem, da gre parabola skozi izhodišče, za neznanki izberemo parametra enačbe $y = ax^2 + bx$, torej a in b (glej sliko 2).

Vektor neznank \mathbf{x} je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3)$$



Slika 2: Izbira neznank pri izračunu optimalne parabole, ki gre skozi središče

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.

Sestavimo $n = \underline{\quad}$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - ax_1^2 - bx_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - ax_2^2 - bx_2 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - ax_3^2 - bx_3 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - ax_4^2 - bx_4 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor \mathbf{x}_0 .

Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta a_0 in b_0 . Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne (ne glede na kvadrate koordinat x), bomo nastavili kar $a_0 = b_0 = 0$. Vektor približnih vrednosti neznank \mathbf{x}_0 je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (5)$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$.

Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) \mathbf{B} in vektor odstopanj enačb popravkov \mathbf{f} . Za matriko \mathbf{B} moramo vse enačbe popravkov iz 4 odvajati po obeh neznankah iz 3. V našem primeru je matrika \mathbf{B} je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Za določitev vektorja odstopanj \mathbf{f} izhajamo iz enačb popravkov iz 4. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0x_1^2 + b_0x_1 - y_1 \\ a_0x_2^2 + b_0x_2 - y_2 \\ a_0x_3^2 + b_0x_3 - y_3 \\ a_0x_4^2 + b_0x_4 - y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (7)$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko \mathbf{N} in vektor \mathbf{t} .

Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko \mathbf{N} , ki je velikosti $_ \times _$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \quad (8)$$

Vektor \mathbf{t} je velikosti $_ \times _$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix} \quad (9)$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor \mathbf{x} .

Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \quad (10)$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 5 nastavljene na 0, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix} \quad (12)$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} . Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 11, matrike koeficientov \mathbf{B} iz enačbe 6 in vektorja odstopanj enačb popravkov \mathbf{f} iz enačbe 7 izračunamo vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix} \quad (13)$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

Vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} (enačba 13) prištejemo vektorju opazovanj \mathbf{l} (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix} \quad (14)$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave. Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.
11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem. Zapišimo samo še iskano enačbo optimalne parabole, ki gre skozi središče:

$$y = ax^2 + bx = _ \cdot x^2 + _ \cdot x \quad (15)$$