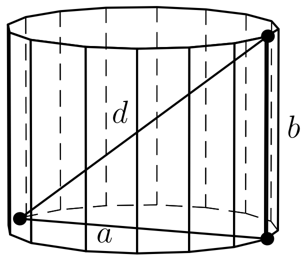
Posredna izravnava po MNK – Opazovanja v valju:

V valju smo izmerili tri količine (glej sliko 1): premer osnovne ploskve $a = 10.0$m, višino $b = 20.0$m in prostorsko diagonalo $d = 22.0$m. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj, koliko litrov soka (beri piva) bi lahko pretočili v valj.



Slika 1: Skica valja in opazovanj

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n =$ __, $n_0 =$ __, $r =$ __ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

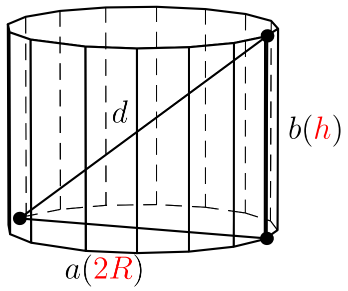
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, bo matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & 0 & 0 \\ 0 & \_\_ & 0 \\ 0 & 0 & \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 =$ __ neznank. Za neznanki bomo vzeli polmer osnovne ploskve R in višino valja h, kot prikazuje slika 2.

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti __ $\times$ __ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ h \end{bmatrix} \tag{3}$$



Slika 2: Izbira neznank pri obravnavanem valju

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - 2R = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - h = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d} - \sqrt{4R^2 + h^2} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta R_0 in h_0. Enačbe popravkov iz 4 so nelinearne (tretja enačba), zato bomo nastavili približne vrednosti iz opazovanj, torej $R_0 = a/2$ in $h_0 = b$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 4 odvajati po obeh neznankah iz 3. V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial R} & \frac{\partial F_1}{\partial h} \\ \frac{\partial F_2}{\partial R} & \frac{\partial F_2}{\partial h} \\ \frac{\partial F_3}{\partial R} & \frac{\partial F_3}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 4. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2R_0 - a \\ h_0 - b \\ \sqrt{4R_0^2 + h_0^2} - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko **N** in vektor **t**.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko **N**, ki je velikosti ___ × ___:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

   Vektor **t** je velikosti ___ × ___:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor **x**.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ dobimo kot:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{11}$$

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 5 izračunane iz opazovanj, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili male vrednosti, popravke približnim vrednostim. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} R \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj **v**. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 11, matrike koeficientov **B** iz enačbe 6 in vektorja odstopanj enačb popravkov **f** iz enačbe 7 izračunamo vektor popravkov opazovanj **v** kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{13}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj **v** (enačba 13) prištejemo vektorju opazovanj **l** (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{14}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Dodatne iteracije ne bomo izvedli.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga zahteva, da izračunamo prostornino valja V in le-to predstavimo tudi v litrih soka (piva). Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz 12 in dobimo:

$$V = \pi\, R^2\, h = \underline{\quad}\,\mathrm{m}^3 = \underline{\quad}\,\mathrm{L} \tag{15}$$