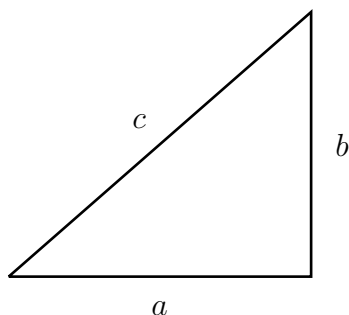


Posredna izravnava po MNK – Pravokotni trikotnik:

Opazovali smo stranice v pravokotnem trikotniku in dobili: $a = 216.7$ m, $b = 163.3$ m in $c = 271.3$ m, kot prikazuje slika 1. Dolžine smo izmerili z razdaljemerom, ki ima podano natančnost kot $\sigma_d = 1.0$ cm + 1.0 cm/100 m. Izravnaj opazovanja s posredno izravnavo in določi površino trikotnika.



Slika 1: Skica pravokotnega trikotnika

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke [PosrednaIzravnavaMNK.pdf](#).

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Podatki naloge kažejo, da imamo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \text{ m} \\ \underline{\quad} \text{ m} \\ \underline{\quad} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Opazovanja so različne natančnosti, saj je izmerjena dolžina odvisna od velikosti dolžine. Izračun standardnih odklonov merjenih dolžin je enak:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 1.0 \text{ cm} + 216.7 \text{ m} \cdot 1.0 \text{ cm}/100 \text{ m} = \underline{\quad} \text{ cm} \\ \sigma_b &= 1.0 \text{ cm} + 163.3 \text{ m} \cdot 1.0 \text{ cm}/100 \text{ m} = \underline{\quad} \text{ cm} \\ \sigma_c &= 1.0 \text{ cm} + 271.3 \text{ m} \cdot 1.0 \text{ cm}/100 \text{ m} = \underline{\quad} \text{ cm} \end{aligned} \quad (2)$$

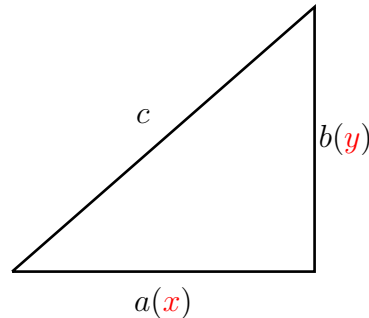
Variančno-kovariančno matriko opazovanj Σ zato sestavimo kot:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \text{ cm}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\quad} \text{ cm}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\quad} \text{ cm}^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Če si za referenčno varianco a-priori izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_c^2$, bo matrika uteži \mathbf{P} enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\quad} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (4)$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank \mathbf{x} . Izbrati moramo $u = n_0 = \underline{\quad}$ neznank. Za neznanki bomo vzeli obe kateti, kot prikazuje slika 2.



Slika 2: Izbira neznank pri obravnavanem pravokotnem trikotniku

Vektor neznank \mathbf{x} je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Sestavimo $n = \underline{\quad}$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor \mathbf{x}_0 . Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta x_0 in y_0 . Enačbe popravkov iz 6 so nelinearne (tretja enačba), zato bomo nastavili približne vrednosti iz opazovanj, torej $x_0 = a$ in $y_0 = b$. Vektor približnih vrednosti neznank \mathbf{x}_0 je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\text{m} \\ \underline{\quad}\text{m} \end{bmatrix} \quad (7)$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) \mathbf{B} in vektor odstopanj enačb popravkov \mathbf{f} . Za matriko \mathbf{B} moramo vse enačbe popravkov iz 6 odvajati po obeh neznankah iz 5. V našem primeru je matrika \mathbf{B} je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Za določitev vektorja odstopanj \mathbf{f} izhajamo iz enačb popravkov iz 6. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (9)$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko \mathbf{N} in vektor \mathbf{t} .

Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko \mathbf{N} , ki je velikosti $\text{---} \times \text{---}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Vektor \mathbf{t} je velikosti $\text{---} \times \text{---}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor Δ , in končne vrednosti neznank, vektor \mathbf{x} .

Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank Δ dobimo kot:

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 7 izračunane iz opazovanj, smo v vektorju Δ dobili male vrednosti, popravke približnim vrednostim. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} . Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank Δ iz enačbe 13, matrike koeficientov \mathbf{B} iz enačbe 8 in vektorja odstopanj enačb popravkov \mathbf{f} iz enačbe 9 izračunamo vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \Delta = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

Vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} (enačba 15) prištejemo vektorju opazovanj \mathbf{l} (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \text{---m} \\ \text{---m} \\ \text{---m} \end{bmatrix} \quad (16)$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.

Ker so enačbe popravkov iz 6 nelinearne, moramo ugotoviti, ali potrebujemo še eno iteracijo. Ker so dobljeni popravki približnih vrednosti neznank iz enačbe 13 majhne v primerjavi z velikostjo trikotnika, bi lahko sklepali, da druge iteracije ne potrebujemo. Test: uporabimo izravnane vrednosti neznank kot približne vrednosti in ponovimo. Dobimo:

$$\Delta \mathbf{x}_{2i} = \begin{bmatrix} \delta x_{2i} \\ \delta y_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.26 \times 10^{-8} \text{m} \\ -1.05 \times 10^{-7} \text{m} \end{bmatrix} \quad (17)$$

kar je dejansko zanemarljivo. Ena iteracija je povsem dovolj.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.

Naloga zahteva, da izračunamo površino S trikotnika. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz 14 in dobimo:

$$S = \frac{xy}{2} = \text{---m}^2 \quad (18)$$