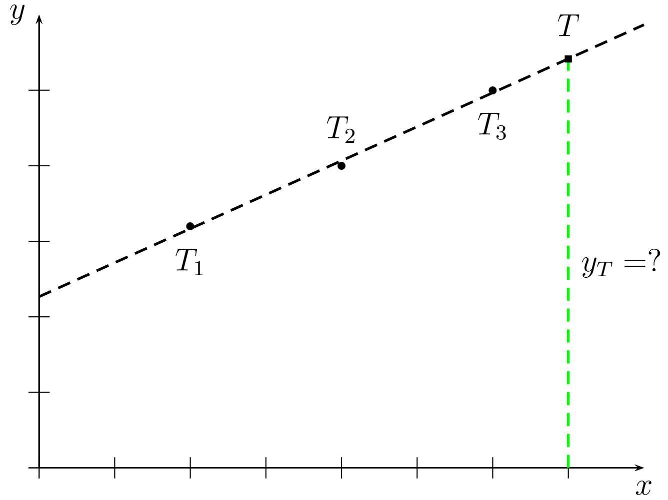
Posredna izravnava po MNK – Premica v ravnini:

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate x, koordinate y pa so opazovane, $T_1(x_1, y_1) = (2.0, 3.2)$, $T_2(x_2, y_2) = (4.0, 4.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (6.0, 5.0)$, kot prikazuje slika 1. Če je bila koordinata y_3 izmerjena dvakrat bolj natančno kot ostali dve, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj koordinato y_T za točko T, ki ima $x_T = 7.0$.



Slika 1: Točke v ravnini

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

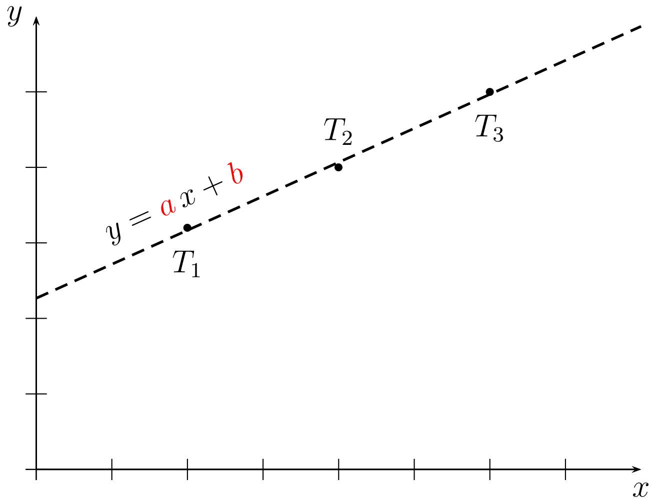
   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 =$ ___ neznank. Ker naloga zahteva izračun premice, ki se optimalno prilega točkam, je najbolj smiselno nastaviti parametra premice, to sta naklonski koeficient a in prosti člen b.

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti ___ × ___ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{3}$$



Slika 2: Izbira neznank pri izračunu optimalne premice

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\,x_1 - b = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\,x_2 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\,x_3 - b = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta a_0 in b_0. Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, bomo nastavili kar $a_0 = b_0 = 0$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 4 odvajati po obeh neznankah iz 3. V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 4. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0\,x_1 + b_0 - y_1 \\ a_0\,x_2 + b_0 - y_2 \\ a_0\,x_3 + b_0 - y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti ___ $\times$ ___:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti ___ $\times$ ___:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 5 nastavljene na 0, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 11, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 6 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 7 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 13) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga zahteva, da izračunamo (interpolirano) koordinato y_T točke T, kjer je $x_T = 7.0$. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz 12 in dobimo:

$$y_T = a\,x_T + b = \underline{\quad} \tag{15}$$