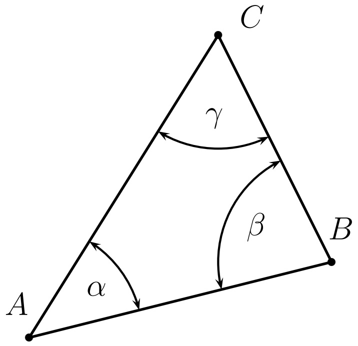
Posredna izravnava po MNK – Merjeni vsi koti trikotnika:

V trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote in dobili: $\alpha = 41°33'$, $\beta = 78°57'$ in $\gamma = 59°27'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1: Skica trikotnika in vseh notranjih kotov

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = \_\_\_$, $n_0 = \_\_\_$, $r = \_\_\_$ in:

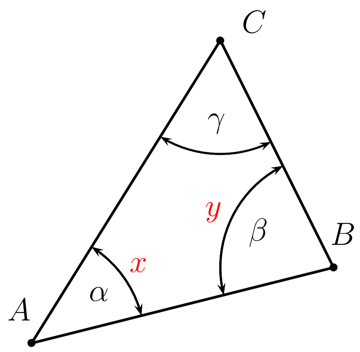
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ\_\_\_' \\ \_\_\_^\circ\_\_\_' \\ \_\_\_^\circ\_\_\_' \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = \_\_\_$ neznank. Izbrali bomo dva neznana kota, kot prikazuje slika 2, neznanki pa označili z x in y. Neznanka x predstavlja kot α, medtem kot neznanka y kot β. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti $\_\_\_ \times \_\_\_$ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3}$$



Slika 2: Izbira neznank v trikotniku, ko merimo notranje kote

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{\gamma} + x + y - 180^\circ = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta x_0 in y_0. Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, bomo nastavili kar $x_0 = y_0 = 0^\circ$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ \\ \_\_\_^\circ \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 4 odvajati po obeh neznankah iz 3. V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 4. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \\ 180^\circ - x_0 - y_0 - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_^\circ\_\_\_' \\ \_\_\_^\circ\_\_\_' \\ \_\_\_^\circ\_\_\_' \end{bmatrix} \tag{7}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti __ × __:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{8}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti __ × __:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \end{bmatrix} \tag{9}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{10}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ dobimo kot:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \end{bmatrix} \tag{11}$$

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 5 nastavljene na 0, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \end{bmatrix} \tag{12}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 11, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 6 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 7 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}' \\ \underline{\quad}' \\ \underline{\quad}' \end{bmatrix} \tag{13}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 13) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ\underline{\quad}' \end{bmatrix} \tag{14}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.