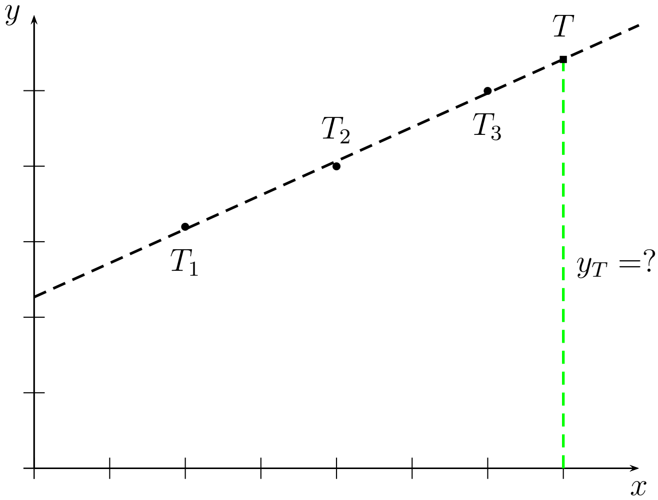
MNK – Premica v ravnini:

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate x, koordinate y pa so opazovane, $T_1(x_1, y_1) = (2.0, 3.2)$, $T_2(x_2, y_2) = (4.0, 4.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (6.0, 5.0)$, kot prikazuje slika 1. Z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj koordinato y_T za točko T, ki ima $x_T = 7.0$.



Slika 1: Točke v ravnini

Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = \_\_\_$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana. Matrika uteži je velikosti $\_\_\_ \times \_\_\_$, uteži opazovanj pa so na koncu enake:

$$p_1 = \_\_\_ \qquad p_2 = \_\_\_ \qquad p_3 = \_\_\_ \tag{2}$$

   Minimalno število opazovanj je $n_0 = \_\_\_$, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 = \_\_\_$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r = \_\_\_$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Kako dobiti pogoj, katerega morajo točke izpolnjevati pri premici? Če izračunamo

naklonski koeficient iz točk T_1 in T_2, mora biti ta enak naklonskemu koeficientu iz točk T_2 in T_3. Pogoj ima obliko:

$$\frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} \quad \rightarrow \quad \hat{y}_2 - \hat{y}_1 = \hat{y}_3 - \hat{y}_2 \tag{3}$$

Če sedaj pogoj iz enačbe 3 preuredimo, sestavimo pogojno enačbo:

$$F_1 \equiv \hat{y}_1 - 2\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0 \tag{4}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V pogojne enačbe 4 vstavimo $\hat{y}_i = y_i + v_i$, $(i = 1, 2, 3)$ in dobimo:

$$F_1 \equiv y_1 + v_1 - 2(y_2 + v_2) + y_3 + v_3 = 0 \tag{5}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r = \underline{\quad}$ popravkov v odvisnosti od ostalih popravkov, ki nastopajo v pogojni enačbi Zapišemo:

$$F_1 \equiv v_3 = -y_1 - v_1 + 2(y_2 + v_2) - y_3 \tag{6}$$

   Če v enačbi 6 vstavimo vrednosti opazovanih koordinat y, dobimo:

$$F_1 \equiv v_3 = 2v_2 - v_1 + \underline{\quad} \tag{7}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{8}$$

   Uteži opazovanj dobimo iz enačbe 2.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi 6 in 7 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 2, potem za funkcijo Φ iz enačbe 8 dobimo:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3(2v_2 - v_1 + \underline{\quad})^2 \Rightarrow \min. \tag{9}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata samo še dva popravka, v_1 in v_2. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1, v_2)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1, v_2)$ iz enačbe 9 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode po obeh popravkih in jih izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} &= 2p_1 v_1 + 2p_3(2v_2 - v_1 + \underline{\quad})(-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} &= 2p_2 v_2 + 2p_3(2v_2 - v_1 + \underline{\quad})2 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

   V enačbi 10 smo dobili dve enačbi z dvema neznanima popravkoma, v_1 in v_2.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Enačbi 10 prvo delimo z 2, potem pa preuredimo, da dobimo dve enačbi z dvema neznankama, in sicer:

$$\_\_v_1 + \_\_v_2 = \_\_ \tag{11}$$
$$\_\_v_1 + \_\_v_2 = \_\_ \tag{12}$$

Rešimo enačbi 12 in dobimo:

$$v_1 = \_\_ \qquad v_2 = \_\_ \tag{13}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
Uporabimo enačbi 6 oziroma 7 in dobimo vse ostale popravke:

$$v_3 = \_\_ \tag{14}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{y}_1 = \_\_ \qquad \hat{y}_2 = \_\_ \qquad \hat{y}_3 = \_\_ \tag{15}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Prvo moramo izračunati enačbo premice, ki se optimalno prilega točkam. Izračunamo koeficinet a in prosti člen b, uporabimo pa izravnana opazovanja iz enačbe 15. Dobimo:

$$a = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = \_\_ \qquad b = \hat{y}_1 - a x_1 = \_\_ \tag{16}$$

Sedaj uporabimo koeficiente premice iz enačbe 16, da izračunamo y_T točke T, pri koordinati $x_T = 7.0$:

$$y_T = a\,x_T + b = \_\_ \tag{17}$$

Posredna metoda

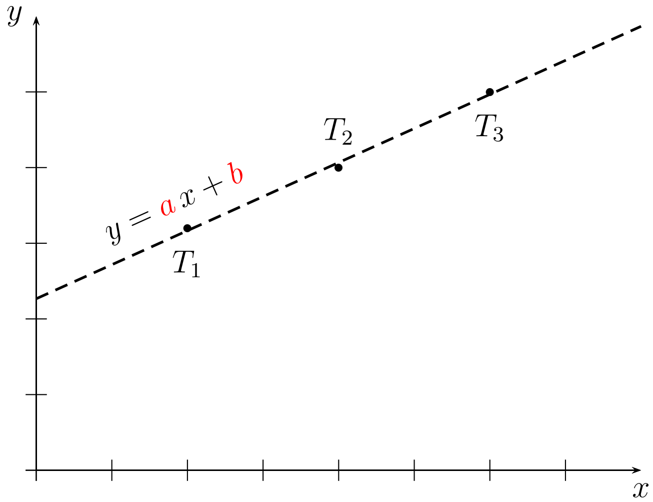
Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n = \_\_$, $n_0 = \_\_$, $r = \_\_$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$p_1 = \_\_ \quad p_2 = \_\_ \quad p_3 = \_\_ \tag{19}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 =$ ___. Ker naloga zahteva izračun premice, ki se optimalno prilega točkam, je najbolj smiselno nastaviti parametra premice, to sta naklonski koeficient a in prosti člen b.



Slika 2: Izbira neznank pri izračunu optimalne premice

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 = a\,x_1 + b \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 = a\,x_2 + b \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 = a\,x_3 + b \end{aligned} \tag{20}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv y_1 + v_1 = a\,x_1 + b \\ F_2 &\equiv y_2 + v_2 = a\,x_2 + b \\ F_3 &\equiv y_3 + v_3 = a\,x_3 + b \end{aligned} \tag{21}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = a\,x_1 + b - y_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = a\,x_2 + b - y_2 \\ F_3 &\equiv v_3 = a\,x_3 + b - y_3 \end{aligned} \tag{22}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 8), uteži dobimo iz enačbe 2:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \tag{23}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
   Uporabimo funkcijo Φ in enačbe 22:

$$\Phi = p_1(a\,x_1 + b - y_1)^2 + p_2(a\,x_2 + b - y_2)^2 + p_3(a\,x_3 + b - y_3)^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{24}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata obe neznanki, a in b. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(a, b)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(a, b)$ iz enačbe 24 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode funkcije $\Phi(a, b)$ po obeh neznankah (in jih izenačili z 0).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 2p_1(a\,x_1 + b - y_1)x_1 + 2p_2(a\,x_2 + b - y_2)x_2 + 2p_3(a\,x_3 + b - y_3)x_3 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 2p_1(a\,x_1 + b - y_1) + 2p_2(a\,x_2 + b - y_2) + 2p_3(a\,x_3 + b - y_3) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

   V enačbi 25 smo dobili dve enačbi z dvema neznankama.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.
   Enačbe 25 najprej delimo z 2, nato pa jih preuredimo, da dobimo:

$$\begin{aligned} \_\_a + \_\_b &= \_\_ \\ \_\_a + \_\_b &= \_\_ \end{aligned} \tag{26}$$

   Rešimo enačbi 26 in dobimo vrednosti obeh neznank, a in b:

$$a = \_\_ \qquad b = \_\_ \tag{27}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 22.

$$\begin{aligned} v_1 &= a\,x_1 + b - y_1 = \_\_ \\ v_2 &= a\,x_2 + b - y_2 = \_\_ \\ v_3 &= a\,x_3 + b - y_3 = \_\_ \end{aligned} \tag{28}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{y}_1 = \_\_ \qquad \hat{y}_2 = \_\_ \qquad \hat{y}_3 = \_\_ \tag{29}$$

Za izračun y_T točke T, kjer je $x_T = 7.0$, uporabimo ocenjene neznanke iz 27 in dobimo:

$$y_T = a\,x_T + b = \_\_ \tag{30}$$