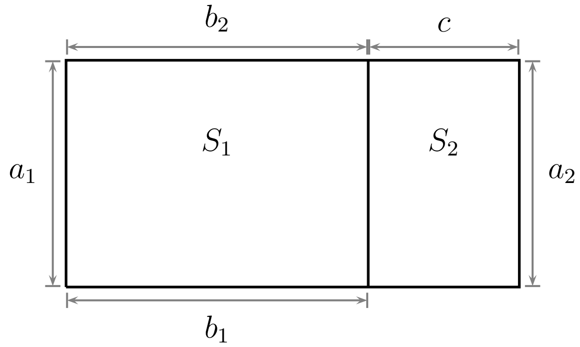
MNK – Parcela, sestavljena iz dveh pravokotnikov:

Parcela je sestavljena iz dveh delov, kot prikazuje slika 1. Da bi določili površini obeh delov (S_1 in S_2) smo izmerili 5 stranic, in sicer: $a_1 = 35.0\,\text{m}$ ($\sigma_{a_1} = 0.1\,\text{m}$), $a_2 = 35.1\,\text{m}$ ($\sigma_{a_2} = 0.2\,\text{m}$), $b_1 = 20.0\,\text{m}$ ($\sigma_{b_1} = 0.2\,\text{m}$), $b_2 = 19.8\,\text{m}$ ($\sigma_{b_2} = 0.1\,\text{m}$) in $c = 10.0\,\text{m}$ ($\sigma_c = 0.1\,\text{m}$). Z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in določi površini S_1 in S_2.



Slika 1: Skica obeh delov parcele in opazovane stranice parcel

Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n =$ ___. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Prvo sestavimo matriko $\mathbf{\Sigma}$, izberemo referenčno varianco σ_0^2, izračunamo matriko $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$. Da dobimo matriko uteži, ki ima samo cela števila (najmanjša možna), moramo za referenčno varianco a-priori izbrati $\sigma_0^2 = \_\_\text{m}^2$. Matrika uteži je velikosti ___ $\times$ ___, na koncu pa so uteži opazovanj enake:

$$p_{a_1} = \_\_\_ \quad p_{a_2} = \_\_\_ \quad p_{b_1} = \_\_\_ \quad p_{b_2} = \_\_\_ \quad p_c = \_\_\_ \tag{2}$$

   Minimalno število opazovanj je $n_0 =$ ___, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 =$ ___.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.

Število pogojnih enačb je torej $r =$ ___, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Pogojni enačbi imata obliko:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}_1 = \hat{a}_2 \\ F_2 &\equiv \hat{b}_1 = \hat{b}_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Vidimo, da nobena enačba iz 3 ne vsebuje opazovanja $\hat{c}$. V pravilih za sestavo pogojnih enačb (glej dokument *MNK_SistemEnacb.pdf*) je zapisano, da moramo v vseh pogojnih enačbah uporabiti vsa opazovanja. Obstajajo pa izjeme, kot v tem primeru. Če v geometriji problema določeno količino (kot je pri tem primeru stranica c) opazujemo tako, da ni nadštevilno izmerjena, potem tega opazovanja ne moremo vključiti v pogojne enačbe.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V pogojne enačbe 3 vstavimo $\hat{i} = i + v_i$, $(i = a_1, a_2, b_1, b_2)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1 + v_{a_1} = a_2 + v_{a_2} \\ F_2 &\equiv b_1 + v_{b_1} = b_2 + v_{b_2} \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r =$ ___ popravka v odvisnosti od ostalih popravkov, ki še nastopajo v pogojnih enačbah. Zapišemo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_2} = v_{a_1} + a_1 - a_2 \\ F_2 &\equiv v_{b_2} = v_{b_1} + b_1 - b_2 \end{aligned} \tag{5}$$

   Če v enačbi 5 vstavimo vrednosti opazovanih stranic, dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_2} = v_{a_1} + \_\_\mathrm{m} \\ F_2 &\equiv v_{b_2} = v_{b_1} + \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{6}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_{a_1}v_{a_1}^2 + p_{a_2}v_{a_2}^2 + p_{b_1}v_{b_1}^2 + p_{b_2}v_{b_2}^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \mathrm{min}. \tag{7}$$

   Uteži opazovanj dobimo iz enačbe 2, vidimo pa, da v enačbi 7 nastopa tudi popravek v_c, ne glede na to, da opazovanje c v pogojnih enačbah ne nastopa.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi 5 in 6 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 2, potem za funkcijo Φ iz enačbe 7 dobimo:

$$\Phi = p_{a_1}v_{a_1}^2 + p_{a_2}(v_{a_1} + \_\_\mathrm{m})^2 + p_{b_1}v_{b_1}^2 + p_{b_2}(v_{b_1} + \_\_\mathrm{m})^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \mathrm{min}. \tag{8}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopajo trije popravki, v_{a_1}, v_{b_1} in v_c. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_{a_1}, v_{b_1}, v_c)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_{a_1}, v_{b_1}, v_c)$ iz enačbe 8 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode po vseh popravkih in jih izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{a_1}} &= 2p_{a_1}v_{a_1} + 2p_{a_2}(v_{a_1} + \_\_\mathrm{m}) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_{b_1}} &= 2p_{b_1}v_{b_1} + 2p_{b_2}(v_{b_1} + \_\_\mathrm{m}) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_c} &= 2p_c v_c = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

V enačbi 9 smo dobili tri enačbe s tremi neznanimi popravki, v_{a_1}, v_{b_1} in v_c.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Iz enačb 9 vidimo, da v vsaki enačbi nastopa le en popravek, zato lahko popravke neposredno izračunamo. Dobimo:

$$\begin{aligned} v_{a_1} &= \_\_\mathrm{m} \\ v_{b_1} &= \_\_\mathrm{m} \\ v_c &= \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{10}$$

Popravek v_c smo lahko dobili neposredno (glej zadnjo enačbo 9). Rezultat je pravilen in logičen, saj stranica c ni nadštevilno izmerjena.

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
Uporabimo enačbi 5 oziroma 6 in dobimo vse ostale popravke:

$$\begin{aligned} v_{a_2} &= \_\_\mathrm{m} \\ v_{b_2} &= \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{11}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \_\_\mathrm{m} \quad \hat{a}_2 = \_\_\mathrm{m} \\ \hat{b}_1 &= \_\_\mathrm{m} \quad \hat{b}_2 = \_\_\mathrm{m} \\ \hat{c} &= \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{12}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Naloga zahteva izračun obeh delov površin S_1 in S_2. Pri izravnanih opazovanjih je vseeno, katero kombinacijo opazovanj uporabimo, vedno dobimo iste rezultate (izravnana opazovanja so skladna). Dobimo:

$$\begin{aligned} S_1 &= \hat{a}_1\hat{b}_1 = \hat{a}_1\hat{b}_2 = \hat{a}_2\hat{b}_1 = \hat{a}_2\hat{b}_2 = \_\_\mathrm{m}^2 \\ S_2 &= \hat{a}_1\hat{c} = \hat{a}_2\hat{c} = \_\_\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Posredna metoda

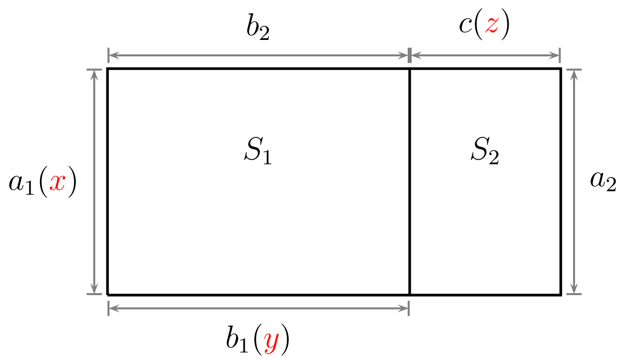
Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n = \_\_\_$, $n_0 = \_\_\_$, $r = \_\_\_$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$p_{a_1} = \_\_\_ \quad p_{a_2} = \_\_\_ \quad p_{b_1} = \_\_\_ \quad p_{b_2} = \_\_\_ \quad p_c = \_\_\_ \tag{15}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = \_\_\_$. Izbrali bomo tri stranice, kot prikazuje slika 2, neznanke pa označili z x, y in z. Neznanka x predstavlja stranici a, y stranici b in z stranico c.



Slika 2: Izbira neznank v obravnavani parceli

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = \_\_\_$ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}_1 = x \\ F_2 &\equiv \hat{a}_2 = x \\ F_3 &\equiv \hat{b}_1 = y \\ F_4 &\equiv \hat{b}_2 = y \\ F_5 &\equiv \hat{c} = z \end{aligned} \tag{16}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1 + v_{a_1} = x \\ F_2 &\equiv a_2 + v_{a_2} = x \\ F_3 &\equiv b_1 + v_{b_1} = y \\ F_4 &\equiv b_2 + v_{b_2} = y \\ F_5 &\equiv c + v_c = z \end{aligned} \tag{17}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_1} = x - a_1 \\ F_2 &\equiv v_{a_2} = x - a_2 \\ F_3 &\equiv v_{b_1} = y - b_1 \\ F_4 &\equiv v_{b_2} = y - b_2 \\ F_5 &\equiv v_c = z - c \end{aligned} \tag{18}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 7), uteži dobimo iz enačbe 2:

$$\Phi = \mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_{a_1}v_{a_1}^2 + p_{a_2}v_{a_2}^2 + p_{b_1}v_{b_1}^2 + p_{b_2}v_{b_2}^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \tag{19}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.
   Uporabimo funkcijo Φ in enačbe 18:

$$\Phi = p_{a_1}(x-a_1)^2 + p_{a_2}(x-a_2)^2 + p_{b_1}(y-b_1)^2 + p_{b_2}(y-b_2)^2 + p_c(z-c)^2 \Rightarrow \min. \tag{20}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopajo tri neznanke, x, y in z. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y, z)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y, z)$ iz enačbe 20 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode funkcije $\Phi(x, y, z)$ po vseh treh neznankah (in jih izenačili z 0).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2p_{a_1}(x - a_1) + 2p_{a_2}(x - a_2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2p_{b_1}(y - b_1) + 2p_{b_2}(y - b_2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2p_c(z - c) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

   V enačbi 21 smo dobili tri enačbe s tremi neznankami.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.
   Enačbe 21 preuredimo in izračunamo neznanke. Tudi tu je v vsaki enačbi le ena neznanka, zato jih rešimo neposredno:

$$\begin{aligned} x &= \underline{\quad}\,\mathrm{m} \\ y &= \underline{\quad}\,\mathrm{m} \\ z &= \underline{\quad}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{22}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 18.

$$\begin{aligned} v_{a_1} &= x - a_1 = \_\_\_\mathrm{m} \\ v_{a_2} &= x - a_2 = \_\_\_\mathrm{m} \\ v_{b_1} &= y - b_1 = \_\_\_\mathrm{m} \\ v_{b_2} &= y - b_2 = \_\_\_\mathrm{m} \\ v_c &= z - c = \_\_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{23}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \_\_\_\mathrm{m} \quad \hat{a}_2 = \_\_\_\mathrm{m} \\ \hat{b}_1 &= \_\_\_\mathrm{m} \quad \hat{b}_2 = \_\_\_\mathrm{m} \\ \hat{c} &= \_\_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{24}$$

Na koncu izračunamo še površini obeh delov parcel. Uporabili bomo neznanke iz enačbe 22:

$$\begin{aligned} S_1 &= x\,y = \_\_\_\mathrm{m}^2 \\ S_2 &= x\,z = \_\_\_\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{25}$$