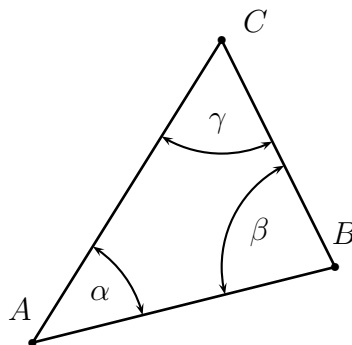


MNK – Merjeni vsi koti trikotnika:

V trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote in dobili: $\alpha = 41^\circ 33'$, $\beta = 78^\circ 57'$ in $\gamma = 59^\circ 27'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1: Skica trikotnika in vseh notranjih kotov

Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = \underline{\quad}$. Vektor opazovanj \mathbf{l} je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \end{bmatrix} \quad (1)$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \rightarrow p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \underline{\quad} \quad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} = p_{\beta\gamma} = \underline{\quad} \quad (2)$$

Minimalno število opazovanj je $n_0 = \underline{\quad}$, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 = \underline{\quad}$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.

Število pogojnih enačb je torej $r = \underline{\quad}$, v katerih nastopajo le izravnanja opazovanja in konstanta (katera je tu konstanta?). Pogoj, ki velja za naša opazovanja, je seveda:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \underline{\quad}^\circ \quad (3)$$

Pogoj iz enačbe 3 uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki je:

$$F_1 \equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \underline{\quad}^\circ \quad (4)$$

Sedaj že vemo, da je v enačbi 4 preveč neznanih količin, zato enačba ni enolično rešljiva.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja \hat{l}_i nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

V enačbo iz 4 vstavimo $\hat{i} = i + v_i$, ($i = \alpha, \beta, \gamma$) in dobimo:

$$F_1 \equiv \alpha + v_\alpha + \beta + v_\beta + \gamma + v_\gamma = \underline{\quad}^\circ \quad (5)$$

Tudi preoblikovani enačbi v 5 vsebujeta preveč neznanih količin za enolično rešitev.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.

Izpostaviti moramo $r = \underline{\quad}$ (ker imamo toliko enačb) popravek v odvisnosti od ostalih $n_0 = \underline{\quad}$ popravkov. Glede na enačbo 5 bomo izpostavili popravek v_γ v odvisnosti od popravkov v_α in v_β . Dobimo:

$$F_1 \equiv v_\gamma = \underline{\quad}^\circ - \alpha - v_\alpha - \beta - v_\beta - \gamma \quad (6)$$

Če v enačbo 6 vstavimo vrednosti opazovanih kotov, dobimo:

$$F_1 \equiv v_\gamma = \underline{\quad}' - v_\alpha - v_\beta \quad (7)$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ .

Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \quad (8)$$

Uteži opazovanj dobimo iz enačbe 2.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.

Če uporabimo enačbi 6 in 7 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 2, potem za funkcijo Φ iz enačbe 8 dobimo:

$$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma (\underline{\quad}' - v_\alpha - v_\beta)^2 \Rightarrow \min. \quad (9)$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata dva popravka, v_α in v_β . Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_\alpha, v_\beta)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ .

Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_\alpha, v_\beta)$ iz enačbe 9 bomo dobili tako, da bomo iskali oba parcialna odvoda, $\partial\Phi/\partial v_\alpha$ in $\partial\Phi/\partial v_\beta$, in ju izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial v_\alpha} &= 2p_\alpha v_\alpha + 2p_\gamma (\underline{\quad}' - v_\alpha - v_\beta)(-1) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_\beta} &= 2p_\beta v_\beta + 2p_\gamma (\underline{\quad}' - v_\alpha - v_\beta)(-1) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

V enačbi 10 smo dobili dve enačbi z dvema neznanima količinama, popravkoma v_α in v_β .

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti. Enačbi 10 preuredimo, da dobimo dve enačbi z dvema neznankama, in sicer:

$$\underline{\quad} v_\alpha + \underline{\quad} v_\beta = \underline{\quad}' \quad (11)$$

$$\underline{\quad} v_\alpha + \underline{\quad} v_\beta = \underline{\quad}' \quad (12)$$

Rešimo enačbi 12 in dobimo:

$$v_\alpha = \underline{\quad}' \quad v_\beta = \underline{\quad}' \quad (13)$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.

Uporabimo enačbo 6 oziroma 7 in dobimo še popravek tretjega kota:

$$v_\gamma = \underline{\quad}' - v_\alpha - v_\beta = \underline{\quad}' \quad (14)$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{I}}$.

Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{\alpha} = \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \quad \hat{\beta} = \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \quad \hat{\gamma} = \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \quad (15)$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.

Ni neznank pri tej nalogi.

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Kako v tem primeru vidimo "aritmetnično sredino" rezultatov? Namig: kako se razdeli odstopanje pogojne enačbe na popravke...

Posredna metoda

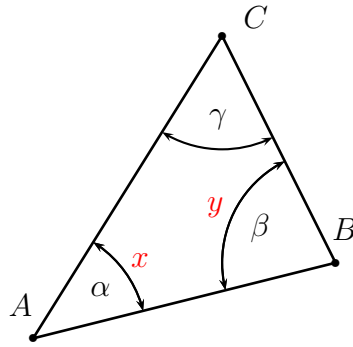
Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \\ \underline{\quad}^\circ \underline{\quad}' \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \rightarrow p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \underline{\quad} \quad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} = p_{\beta\gamma} = \underline{\quad} \quad (17)$$



Slika 2: Izbira neznank v trikotniku, ko merimo notranje kote

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.

Izbrati moramo $u = n_0 = \underline{\quad}$ neznank. Izbrali bomo dva neznana kota, kot prikazuje slika 2, neznanki pa označili z x in y . Neznanka x predstavlja kot α , medtem kot neznanka y kot β .

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.

Sestavimo $n = \underline{\quad}$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} = x \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} = y \\ F_3 &\equiv \hat{\gamma} = \underline{\quad}^\circ - x - y \end{aligned} \quad (18)$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja \hat{l}_i nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha + v_\alpha = x \\ F_2 &\equiv \beta + v_\beta = y \\ F_3 &\equiv \gamma + v_\gamma = \underline{\quad}^\circ - x - y \end{aligned} \quad (19)$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_\alpha = x - \alpha \\ F_2 &\equiv v_\beta = y - \beta \\ F_3 &\equiv v_\gamma = \underline{\quad}^\circ - x - y - \gamma \end{aligned} \quad (20)$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ .

Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 8), uteži dobimo iz enačbe 2:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \quad (21)$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbe 20:

$$\Phi = p_\alpha (x - \alpha)^2 + p_\beta (y - \beta)^2 + p_\gamma (\underline{\quad}^\circ - x - y - \gamma)^2 \Rightarrow \min. \quad (22)$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata dve neznanki, x in y . Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ .

Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y)$ iz enačbe 22 bomo dobili tako, da bomo poiskali oba parcialna odvoda, $\partial\Phi/\partial x$ in $\partial\Phi/\partial y$, in ju izenačili z 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 2p_\alpha(x - \alpha) + 2p_\gamma(\text{---}^\circ - x - y - \gamma)(-1) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= 2p_\beta(y - \beta) + 2p_\gamma(\text{---}^\circ - x - y - \gamma)(-1) = 0\end{aligned}\tag{23}$$

V enačbi 23 smo dobili dve enačbi z dvema neznankama, x in y .

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

Enačbi 23 preuredimo in dobimo:

$$\begin{aligned}\text{---}x + \text{---}y &= \text{---}^\circ \text{---}' \\ \text{---}x + \text{---}y &= \text{---}^\circ \text{---}'\end{aligned}\tag{24}$$

Rešimo enačbi 24 in dobimo vrednosti obeh neznank:

$$x = \text{---}^\circ \text{---}' \quad y = \text{---}^\circ \text{---}'\tag{25}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 20.

$$\begin{aligned}F_1 \equiv v_\alpha &= x - \alpha = \text{---}' \\ F_2 \equiv v_\beta &= y - \beta = \text{---}' \\ F_3 \equiv v_\gamma &= \text{---}^\circ - x - y - \gamma = \text{---}'\end{aligned}\tag{26}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{I}}$.

$$\hat{\alpha} = \text{---}^\circ \text{---}' \quad \hat{\beta} = \text{---}^\circ \text{---}' \quad \hat{\gamma} = \text{---}^\circ \text{---}'\tag{27}$$