METODA NAJMANJŠIH KVADRATOV

1. V krogu smo izmerili polmer trikrat in dobili: $r_1 = 2.5\,\text{cm}$, $r_2 = 2.6\,\text{cm}$ in $r_3 = 2.7\,\text{cm}$. Opazovanja izravnajte po metodi najmanjših kvadratov, če so ta nekorelirana in različne natančnosti: $\sigma_{r_1} = 0.1\,\text{cm}$, $\sigma_{r_2} = 0.2\,\text{cm}$ in $\sigma_{r_3} = 0.15\,\text{cm}$.
   Nalogo rešite še tako, da bodo opazovanja enake natančnosti.
   Obe rešitvi dobite tudi tako, da uporabite uteženo oziroma navadno sredino opazovanj.

   REŠITEV: Različne natančnosti: $R = \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r}_3 = 2.57\,\text{cm}$. Enake natančnosti: $R = \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r}_3 = 2.6\,\text{cm}$.

2. Med reperjema A in B je bila višinska razlika izmerjena trikrat, dobili pa smo Δh_1, Δh_2 in Δh_3. Izravnajte opazovanja s posredno in direktno metodo, če so dolžine nivelmanskih linij enake: l_1, $l_2 = 2l_1$ in $l_3 = 3l_2$. Nalogo rešite prvo analitično, nato pa še numerično, če so opazovanja dana kot: $\Delta h_1 = 12.256\,\text{m}$, $\Delta h_2 = 12.240\,\text{m}$ in $\Delta h_3 = 12.255\,\text{m}$.

   REŠITEV: Analitična rešitev - utežena sredina: $\Delta h_A^B = \Delta\hat{h}_1 = \Delta\hat{h}_2 = \Delta\hat{h}_3 = \frac{\Delta h_1 + \frac{1}{2}\Delta h_2 + \frac{1}{6}\Delta h_3}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}}$. Numerična rešitev: $\Delta h_A^B = 12.2511\,\text{m}$.

3. Dolžino D med točkama A in B smo opazovali dvakrat in dobili $d_1 = 12.12\,\text{m}$ ter $d_2 = 12.14\,\text{m}$. Če sta opazovanji enake natančnosti, za vrednosti korelacije med dolžinama $\rho_{12} = \{-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.4\}$ izravnaj opazovanji in izračunaj dolžino D.

   REŠITEV: $D = 12.13\,\text{m}$.

4. Dolžino D med točkama A in B smo opazovali dvakrat in dobili $d_1 = 12.12\,\text{m}$ ter $d_2 = 12.14\,\text{m}$. Če sta natančnosti opazovanji enaki $\sigma_1 = 1\,\text{cm}$ in $\sigma_2 = 2\,\text{cm}$, za vrednosti korelacije med dolžinama $\rho_{12} = \{-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.4\}$ izravnaj opazovanji in izračunaj dolžino D.

   REŠITEV: $D(\rho_{12} = -0.8) = 12.126\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = -0.4) = 12.125\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = 0.0) = 12.124\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = 0.4) = 12.121\,\text{m}$, $D(\rho_{12} = 0.8) = 12.113\,\text{m}$.

5. Dolžino d smo opazovali dvakrat neodvisno in dobili d_1 in d_2. Opazovanje d_1 je dvakrat slabše natančnosti od opazovanja d_2. S pomočjo metode najmanjših kvadratov (direktna in posredna) pokažite, katero opazovanje bo imelo večji vpliv na rezultate izravnave.

   REŠITEV: Ker ima prvo opazovanje dvakrat slabšo natančnost, sta uteži opazovanj enaki: $p_1 = 1$ in $p_2 = 4$. Rezultat izravnave dolžine - utežena sredina - nam poda: $d = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2}{p_1 + p_2} = \frac{d_1 + 4d_2}{5}$. Izravnana vrednost dolžine d bo bližje merjeni vrednosti d_2 kot pa d_1, saj ima d_2 večjo utež. Točneje, popravek v_1 bo 4-krat večji od popravka v_2, saj sta v razmerju: $v_1 : v_2 = 1/p_1 : 1/p_2$.

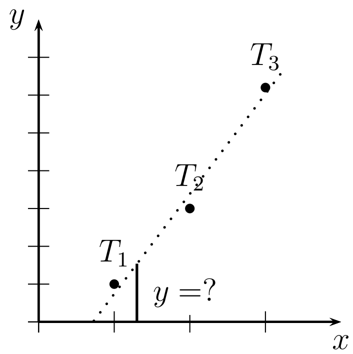
6. Izravnajte opazovane vrednosti ordinat treh točk tako, da bodo točke ležale na premici z enačbo: $y = kx + n$! Opazovanja so nekorelirana in enake natančnosti! Abscise točk so dane in jih nismo opazovali. Opazovanja so: $T_1(0.2, 0.0)$, $T_2(0.9, 1.0)$ in $T_3(2.0, 2.1)$.

REŠITEV: $k = 1.152$, $n = -0.157$.

7. Izravnajte opazovane vrednosti ordinat treh točk tako, da bodo točke ležale na premici z enačbo, ki gre skozi središče! Opazovanja so nekorelirana in enake natančnosti! Abscise točk so dane in jih nismo opazovali. Opazovanja so: $T_1(0.2, 0.0)$, $T_2(0.9, 1.0)$ in $T_3(2.0, 2.1)$.

   REŠITEV: $k = 1.0515$ (prosti člen mora biti enak $n = 0$).

8. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, a poznamo korelacijo $\rho_{y_1 y_2} = -0.25$, po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate y pri vrednosti koordinate $x = 1.3$.



Slika 1: Naloga 8

   REŠITEV: Parametra premice: $a = 2.054$, $b = -1.075$, $y(1.3) = 1.595$.

9. Izravnajte opazovane vrednosti **abscis** treh točk tako, da bodo točke ležale na premici z enačbo: $y = kx + n$! Opazovanja so nekorelirana in enake natančnosti! **Ordinate** točk so dane in jih nismo opazovali. Opazovanja so: $T_1(0.2, 0.0)$, $T_2(0.9, 1.0)$ in $T_3(2.0, 2.1)$.

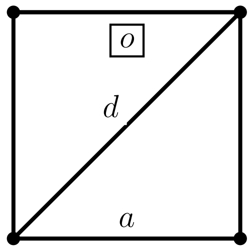
   REŠITEV: Namig: prvo izravnajte premico oblike $x = ay + b$ (izračunajte a in b) in nato preblikujte enačbo $x = ay + b$ v $y = kx + n$ - $k = 1.163$, $n = -0.169$.

10. V kvadratu smo izmerili stranico $a = 3.0\,\mathrm{m}$, diagonalo $d = 4.2\,\mathrm{m}$ in obseg $o = 11.9\,\mathrm{m}$. Če sta a in d opazovani dvakrat bolj natančno kot o, z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.

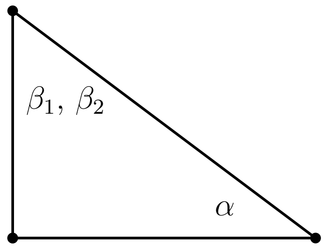
    REŠITEV: $\hat{a} = 2.977\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 4.210\,\mathrm{m}$, $\hat{o} = 11.908\,\mathrm{m}$.

11. V pravokotnem trikotniku smo izmerili oba notranja kota, in sicer: $\alpha = 33°42'$, $\beta_1 = 56°20'$ in $\beta_2 = 56°21'$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_\alpha = 1'$, $\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = 2'$) in medseboj korelirana ($\rho_{\beta_1 \beta_2} = 0.75$), po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_1$ in $\hat{\beta}_2$.

    REŠITEV: $\hat{\alpha} = 33°41'26.7''$, $\hat{\beta} = 56°18'33.3''$.

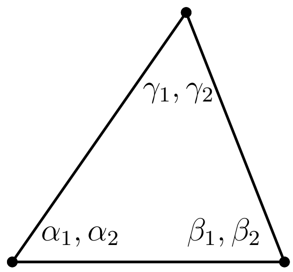


Slika 2: Naloga 10



Slika 3: Naloga 11

12. V trikotniku smo merili vse tri notranje kote (α, β, γ), pri tem, da smo vsak kot smo izmerili dvakrat. Dobili smo: $\alpha_1 = 33°17'$, $\alpha_2 = 33°20'$, $\beta_1 = 80°41'$, $\beta_2 = 80°39'$, $\gamma_1 = 66°5'$ in $\gamma_2 = 66°0'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, izravnaj opazovanja z direktno in posredno metodo po MNK.



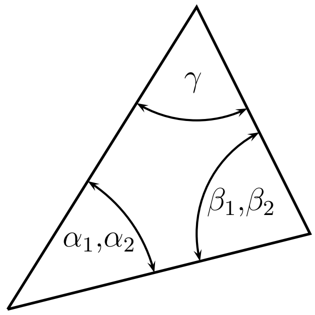
Slika 4: Naloga 12

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 33°18'10''$, $\hat{\beta} = 80°39'40''$, $\hat{\gamma} = 66°2'10''$.

13. V splošnem trikotniku smo opazovali vse tri notranje kote in dobili (glej skico): $\alpha_1 = 47°15'$, $\alpha_2 = 47°20'$ ($\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 3'$), $\beta_1 = 82°25'$, $\beta_2 = 82°20'$ ($\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = 3'$) in $\gamma = 50°0'$ ($\sigma_\gamma = 5'$). Z direktno metodo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj izravnane vrednosti notranjih kotov $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ in $\hat{\gamma}$.

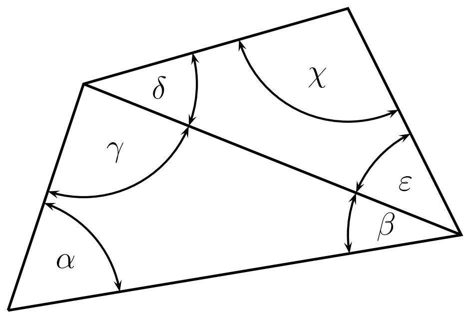
REŠITEV: $\hat{\alpha} = 47°20'8.9''$, $\hat{\beta} = 82°25'8.9''$, $\hat{\gamma} = 50°14'42.3''$.

14. V geodetskem štirikotniku smo izmerili niz kotov, kot jih prikazuje skica. Vsi koti so izmerjeni z enako natančnostjo in imajo vrednosti: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 88°$, $\delta =$



Slika 5: Naloga 13

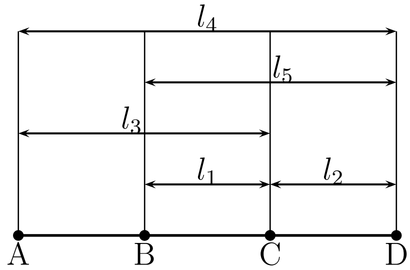
40°, $\varepsilon = 74°$, $\chi = 65°$. Z metodo najmanjših kvadratov določite izravnane vrednosti kotov, in sicer (brez uporabe matrik) posredno (uvedba neznank) in direktno.



Slika 6: Naloga 14

REŠITEV: $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = 40'$, $v_\delta = v_\varepsilon = v_\chi = 20'$.

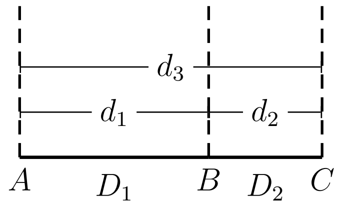
15. Geometričen model, predstavljen na sliki, prikazuje tri kolinearne razdalje $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ in $\overline{CD}$. V geometričnem modelu smo opazovali: $l_1 = 10.0\,\mathrm{m}$, $l_2 = 10.1\,\mathrm{m}$, $l_3 = 19.5\,\mathrm{m}$, $l_4 = 30.1\,\mathrm{m}$ in $l_5 = 20.1\,\mathrm{m}$. Z obema metodama po MNK izravnajte opazovanja in določite dolžine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ in $\overline{CD}$.



Slika 7: Naloga 15

REŠITEV: $\overline{AB} = 9.975\,\mathrm{m}$, $\overline{BC} = 9.9375\,\mathrm{m}$, $\overline{CD} = 10.225\,\mathrm{m}$.

16. Za kontrolo kakovosti razdaljemera smo vzpostavili model dveh vzporednih razdalj $D_1 = \overline{AB}$ in $D_2 = \overline{BC}$ (glej sliko). Med točkami smo opazovali dolžine $d_1 = 15.30\,\mathrm{m}$, $d_2 = 11.65\,\mathrm{m}$ in $d_3 = 27.00\,\mathrm{m}$, vse so bile izmerjene z enako natančnostjo, le da sta

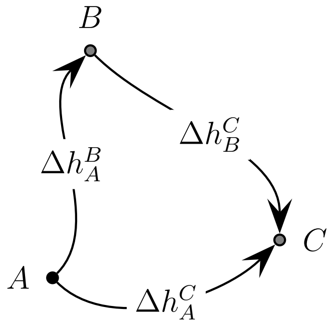


Slika 8: Naloga 16

dolžini d_1 in d_2 korelirani, in sicer $\rho_{d_1 d_2} = 0.1$. Po MNK izravnaj opazovanja in določi izravnane vrednosti dolžin D_1 in D_2.

REŠITEV: $D_1 = 15.317\,\mathrm{m}, D_2 = 11.667\,\mathrm{m}$.

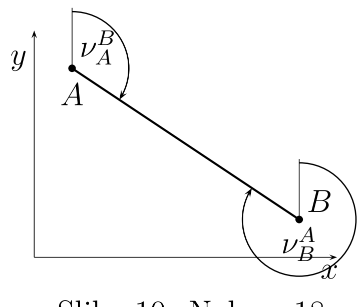
17. Določiti želimo višine dvema novima reperjema B in C s postopkom geometričnega nivelmana. Izmerili smo (glej skico): $\Delta h_A^B = 1.332\,\mathrm{m}$, $\Delta h_A^C = 1.785\,\mathrm{m}$ in $\Delta h_B^C = 0.450\,\mathrm{m}$. Če je višina točke A dana ($H_A = 10.0\,\mathrm{m}$) in so dolžine nivelmanskih linij dolge $d_{AB} = 100\,\mathrm{m}$, $d_{BC} = 100\,\mathrm{m}$ in $d_{AC} = 200\,\mathrm{m}$, po MNK izravnaj opazovanja in določi višine vsem novim reperjem.



Slika 9: Naloga 17

REŠITEV: $H_B = 11.332\,75\,\mathrm{m}$, $H_C = 11.7835\,\mathrm{m}$.

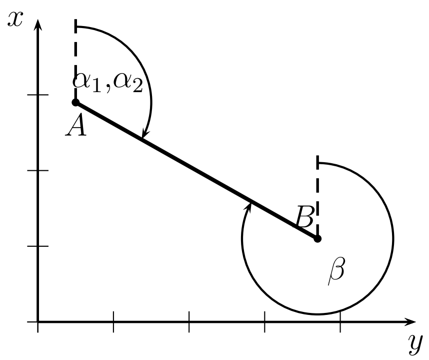
18. Na dveh točkah A in B smo opazovali oba smerna kota in dobili $\nu_A^B = 147°12'17.9''$ in $\nu_B^A = 327°12'22.1''$. Če za natančnosti obeh merjenih smernih kotov velja $\sigma_{\nu_A^B} = 2\sigma_{\nu_B^A}$, po MNK izravnajte opazovanja (brez matrik).



Slika 10: Naloga 18

REŠITEV: $\hat{\nu}_A^B = 147°12'21.3''$.

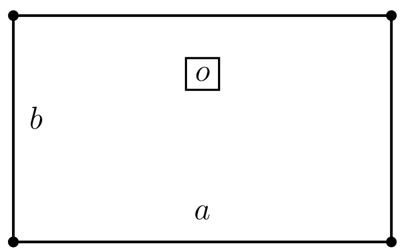
19. Na točki A smo izmerili smerni kot do točke B dvakrat in dobili $\alpha_1 = 147°12'18''$ in $\alpha_2 = 147°12'20''$, na točki B pa smo opazovali smerni kot do točke A enkrat in dobili $\beta = 327°12'24''$. Če so si natančnosti opazovanj v razmerju $\sigma_{\alpha_1} : \sigma_{\alpha_2} : \sigma_\beta = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$, po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 11: Naloga 19

REŠITEV: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 147°12'21.5''$.

20. Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici: $a = 12.4\,\mathrm{m}$ in $b = 7.5\,\mathrm{m}$ ter obseg $o = 40.0\,\mathrm{m}$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.



Slika 12: Naloga 20

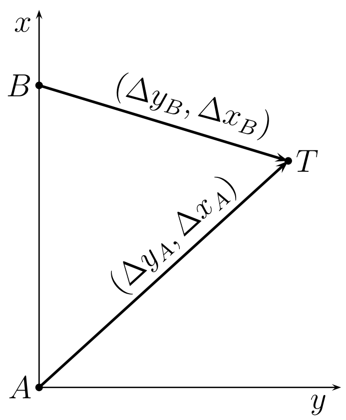
REŠITEV: $\hat{a} = 12.444\,\mathrm{m}$, $\hat{b} = 7.544\,\mathrm{m}$, $\hat{o} = 39.978\,\mathrm{m}$, $S = \hat{a}\hat{b} = 93.886\,\mathrm{m}^2$.

21. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (0\,\mathrm{m}, 5\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja; $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3.5\,\mathrm{m}, 2.1\,\mathrm{m})$ in $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3.4\,\mathrm{m}, -3.0\,\mathrm{m})$. Po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T, če je bazni vektor s točke A določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke B.

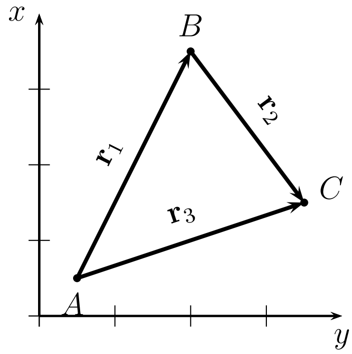
REŠITEV: $T(y_T, x_T) = (3.48\,\mathrm{m}, 2.08\,\mathrm{m})$.

22. Podano imamo eno točko, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 10.0\,\mathrm{m})$. Za določitev koordinat dveh novih točk $B(y_B, x_B)$ in $C(y_C, x_C)$ smo izmerili tri vektorje $\mathbf{r}_1 = (\Delta y_1, \Delta x_1) = (70.1\,\mathrm{m}, 89.8\,\mathrm{m})$, $\mathbf{r}_2 = (\Delta y_2, \Delta x_2) = (69.8\,\mathrm{m}, -69.9\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_3 = (\Delta y_3, \Delta x_3) = (140.2\,\mathrm{m}, 19.7\,\mathrm{m})$. Če so komponente vektorja $\mathbf{r}_3$ določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, po MNK določite koordinate točk B in C.

REŠITEV: $B(y_B, x_B) = (80.233\,\mathrm{m}, 99.711\,\mathrm{m})$, $C(y_C, x_C) = (150.167\,\mathrm{m}, 29.722\,\mathrm{m})$.

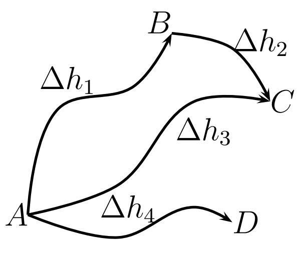


Slika 13: Naloga 21



Slika 14: Naloga 22

23. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper A dano višino $H_A = 10.0\,\mathrm{m}$. Izmerili smo 4 višinske razlike (glej skico) s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij: $\Delta h_1 = -1.01\,\mathrm{m}$ ($d_1 = 50\,\mathrm{m}$), $\Delta h_2 = 0.73\,\mathrm{m}$ ($d_2 = 20\,\mathrm{m}$), $\Delta h_3 = -0.25\,\mathrm{m}$ ($d_3 = 50\,\mathrm{m}$) in $\Delta h_4 = 0.12\,\mathrm{m}$ ($d_4 = 50\,\mathrm{m}$). Po MNK izravnaj opazovanja in določi višine reperjev B, C in D.

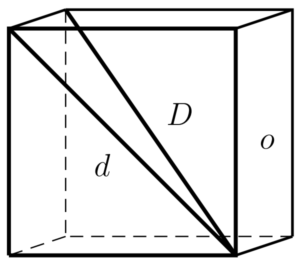


Slika 15: Naloga 23

REŠITEV: $H_B = 9.0025\,\mathrm{m}$, $H_C = 9.7375\,\mathrm{m}$, $H_D = 10.12\,\mathrm{m}$.

24. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14.0\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17.0\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40.0\,\mathrm{m}$). Po MNK izravnaj opazovanja (brez matrik), če sta obe diagonali (d in D) opazovani dvakrat bolj natančno kot obseg (o). Izračunaj tudi prostornino kocke.

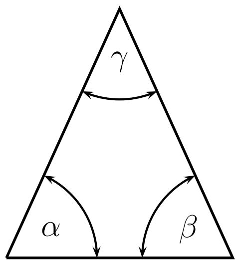
REŠITEV: $a = 9.916\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 14.023\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 17.175\,\mathrm{m}$, $\hat{o} = 39.664\,\mathrm{m}$, $V = a^3 =$



Slika 16: Naloga 24

$975.006\,\mathrm{m}^3$.

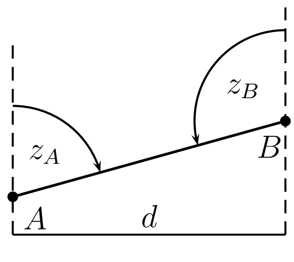
25. V enakokrakem trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote α, β, γ, in sicer $\alpha = 70°$, $\beta = 71°$ in $\gamma = 40°$. Če je kot γ opazovanj 2-krat bolj natančno kot kota α in β, izravnaj opazovanja po MNK.



Slika 17: Naloga 25

REŠITEV: $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 70°3'20''$, $\hat{\gamma} = 39°53'20''$.

26. Med točkama A in B smo obojestransko izmerili zenitni razdalji $z_A = 84°30'$ in $z_B = 95°35'$ (glej skico), kjer je zenitna razdalja z_A izmerjena 3-krat bolj natančno kot zenitna razdalja z_B. Po MNK izravnaj opazovanja in določi višinsko razliko Δh_A^B, če je horizontalna razdalja med točkama A in B enaka $d = 100\,\mathrm{m}$.

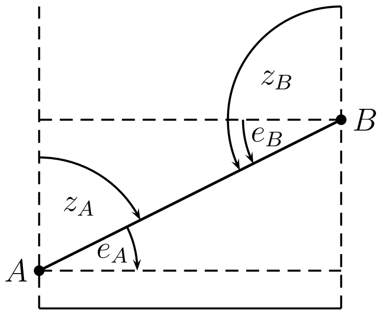


Slika 18: Naloga 26

REŠITEV: $\hat{z}_A = 84°29'30''$, $\hat{z}_B = 95°30'30''$, $\Delta h_A^B = 9.644\,\mathrm{m}$.

27. Med točkama A in B smo obojestransko izmerili zenitni razdalji $z_A = 84°30'$ in $z_B = 95°35'$ in višinska kota $e_A = 5°25'$ in $e_B = -5°30'$ (glej skico). Če sta kota

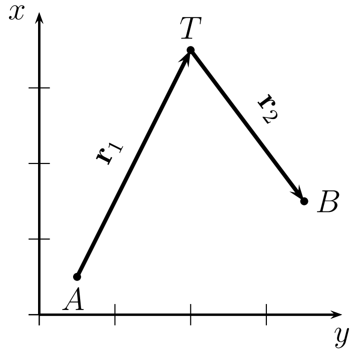
na točki A izmerjena 3-krat bolj natančno kot kota na točki B, po MNK izravnaj opazovanja in določi višinsko razliko Δh_A^B. Horizontalna razdalja med točkama A in B je enaka $d = 100\,\mathrm{m}$.



Slika 19: Naloga 27

REŠITEV: $\hat{z}_A = 84°32'0''$, $\hat{e}_A = 5°28'0''$, $\Delta h_A^B = 9.570\,\mathrm{m}$.

28. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 30\,\mathrm{m})$. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja $\mathbf{r}_1 = (\Delta y_1, \Delta x_1) = (30.1\,\mathrm{m}, 49.8\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_2 = (\Delta y_2, \Delta x_2) = (60.0\,\mathrm{m}, -30.1\,\mathrm{m})$, kot kaže skica. Če so natančnosti koordinat dane kot $\sigma_{y_1} = \sigma_{x_1} = 5\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_{y_2} = \sigma_{x_2} = 7\,\mathrm{cm}$, po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T.



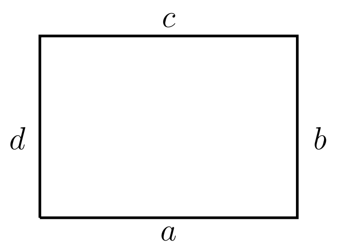
Slika 20: Naloga 28

REŠITEV: $T(y_T, x_T) = (40.066\,\mathrm{m}, 59.901\,\mathrm{m})$.

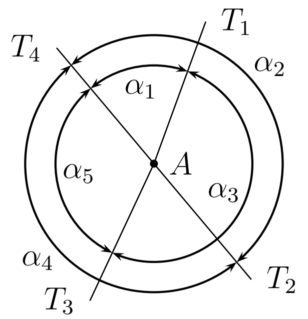
29. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15.0\,\mathrm{m}$, $b = 10.0\,\mathrm{m}$, $c = 14.9\,\mathrm{m}$ in $d = 10.1\,\mathrm{m}$. Če nas zanimata obseg O in osnovna stranica a pravokotnika, s posredno metodo po MNK izravnajte opazovanja tako, da za neznanki nastavite O in a. Stranici a in c sta izmerjeni dvakrat bolj natančno kot stranici b in d. Rezultate preverite tudi z direktno metodo po MNK.

   REŠITEV: $\hat{a} = 14.95\,\mathrm{m}$, $O = 50.00\,\mathrm{m}$.

30. S stojišča A smo preko opazovanih smeri pridobili kote: $\alpha_1 = 61°34'$, $\alpha_2 = 135°13'$, $\alpha_3 = 148°15'$, $\alpha_4 = 224°51'$, $\alpha_5 = 150°14'$, kot jih prikazuje skica. Če so opazovanja (t.s. koti) neodvisna in enake natančnosti z metodo najmanjših kvadratov določite izravnane vrednosti kotov.



Slika 21: Naloga 29



Slika 22: Naloga 30

REŠITEV: $v_{\alpha_1} = v_{\alpha_2} = v_{\alpha_3} = -1'$, $v_{\alpha_2} = v_{\alpha_4} = -2'$.