1 PRENOS PRAVIH POGREŠKOV

Pri prenosu pravih pogreškov nas zanima, kakšen pogrešek smo naredili na izračunanih neznankah ($\mathbf{y}$), če smo jih računali iz pogrešenih opazovanj ($\mathbf{x}$). Pri opazovanjih poznamo vrednosti pravih pogreškov ($\mathbf{\Delta x}$), iščemo pa prave pogreške neznank ($\mathbf{\Delta y}$).

Količine, ki nastopajo pri prenosu pravih pogreškov so:

- Opazovanja / podatki:
  - $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$: n približnih vrednosti opazovanj / podatkov,
  - $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \ldots\ \overline{x}_n]^T$: prave vrednosti opazovanj / podatkov,
  - $\mathbf{\Delta x} = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$: pogreški opazovanj / podatkov (če poznamo vrednosti pogreškov, jih imenujemo "pravi pogreški")
- Neznanke / iskane količine:
  - $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ \ldots\ y_m]^T$: m približnih vrednosti neznank / iskanih količin, računane na osnovi približnih vrednosti opazovanj / podatkov ($\mathbf{x}$),
  - $\overline{\mathbf{y}} = [\overline{y}_1\ \overline{y}_2\ \ldots\ \overline{y}_m]^T$: prave vrednosti neznank / iskanih količin, računanih na osnovi pravih vrednosti opazovanj ($\overline{\mathbf{x}}$),
  - $\mathbf{\Delta y} = \overline{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$: pogreški neznank.

Povezava med neznankami in opazovanji je določena z vektorsko funkcijo $\mathbf{F}$:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Zgornja enačba zapisana v skalarni obliki je tako:

$$\begin{aligned} y_1 + \Delta y_1 &= f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \\ y_2 + \Delta y_2 &= f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \\ y_3 + \Delta y_3 &= f_3(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ y_m + \Delta y_m &= f_m(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Za vsako izmed količin y_i, $(i = 1, \ldots, m)$, izračunamo pogrešek Δy_i. Matrično tako lahko zapišemo:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} \tag{3}$$

Matrika $\mathbf{J}$ je poimenovana kot Jakobijeva matrika in vsebuje parcialne odvode vseh funkcij $(y_i, i = 1, \ldots, m)$ po vseh spremenljivkah $(x_i, i = 1, \ldots, n)$. Vse parcialne odvode računamo na osnovi merjenih vrednostih količin x_i (ne v pravih vrednostih $\overline{x_i}$).

1.1 Postopek izračuna

Pri prenosu pravih pogreškov tako postopamo v naslednjem vrstnem redu:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.

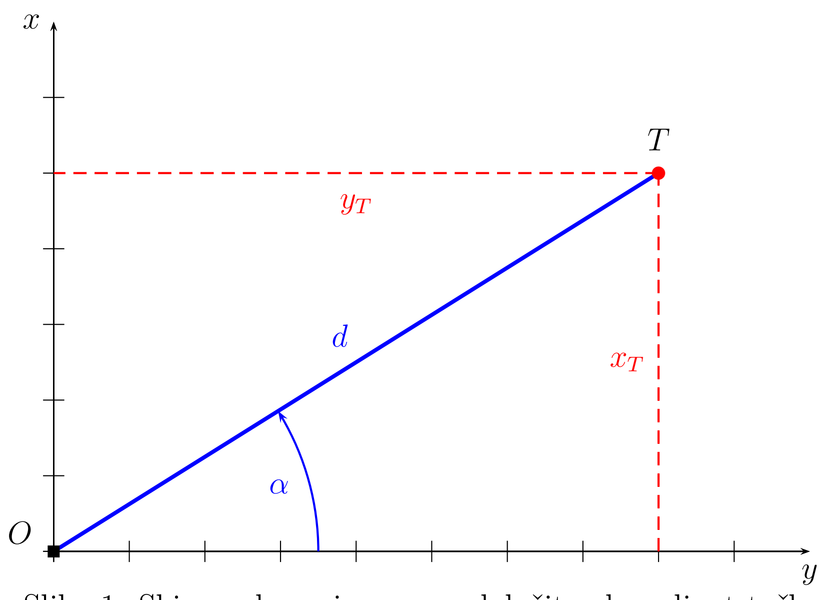
5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}$.

1.2 Geometrijski prikaz na primeru – polarna izmera

Prikažimo geometrijski pomen prenosa pravih pogreškov na preprostem primeru, in sicer pri določitvi koordinat točke T s postopkom polarne izmere. Imamo izhodiščno točko O, ki je v središču koordinatnega sistema, do nove točke T pa merimo dolžino d in kot α, kot prikazuje slika 1. Na sliki so v modri barvi opazovanja, v rdeči barvi neznanke in črno dane količine.



Slika 1: Skica polarne izmere za določitev koordinat točke T

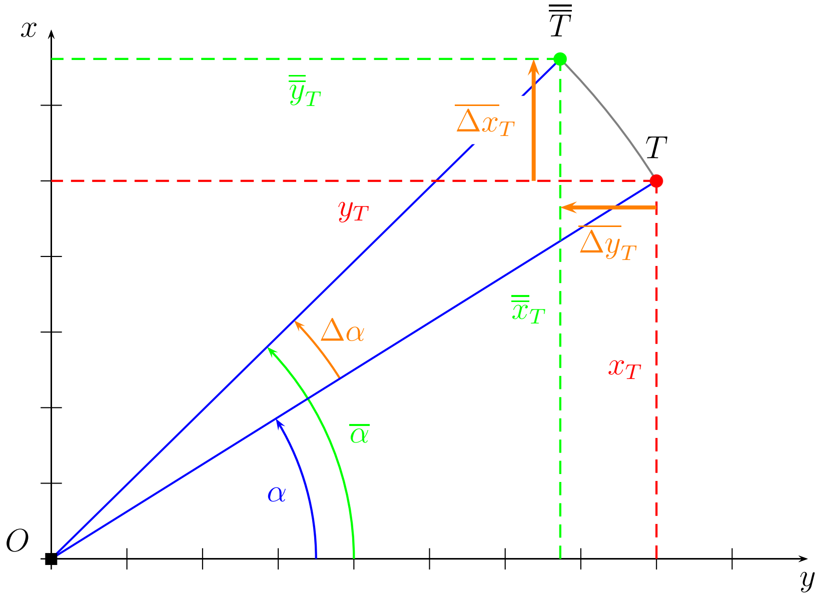
Enačbi za izračun koordinat točke T, y_T in x_T, dobimo iz slike, in sicer:

$$\begin{aligned} y_T &= d \cos \alpha \\ x_T &= d \sin \alpha \end{aligned} \tag{4}$$

V nadaljevanju prikazujemo vpliv pravih pogreškov opazovanj na izračunane vrednosti neznank.

1.2.1 Vpliv pravega pogreška kota

Recimo, da imamo podan pravi pogrešek kota $\Delta\alpha$, ki ima pozitiven predznak. To pomeni, da je pravi kot $\overline{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha > \alpha$. Če bi neposredno upoštevali pravi pogrešek $\Delta\alpha$, dobimo situacijo, kot jo prikazuje slika 2. Pravi položaj točke, označen z $\overline{\overline{T}}$, dobimo tako, da točko T zasukamo za kot $\Delta\alpha$ okoli izhodišča O. Na sliki so z modro barvo označena opazovanja, z rdečo barvo približne vrednosti neznank (izračunane iz opazovanj), z oranžno barvo pravi pogreški neznank in z zeleno barvo prave vrednosti neznank (izračunane iz pravih opazovanj). Prava pogreška neznank sta označena kot $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$, pravi vrednosti neznank pa z $\overline{\overline{y}}_T$ in $\overline{\overline{x}}_T$, saj so določeni točno.



Slika 2: Vpliv pravega pogreška kota $\Delta\alpha$ na položaj točke T

Iz slike vidimo, da sta točki T in $\overline{\overline{T}}$ isto oddaljeni od točke O, saj je dolžina d v tem primeru točna. Razvidno je tudi, da pravi pogrešek $\Delta\alpha$ povzroči pravi pogrešek na obeh koordinatah, povzroči tako $\overline{\Delta y_T}$, kakor tudi $\overline{\Delta x_T}$. Ker je točka $\overline{\overline{T}}$ glede na točko T "zgoraj" in "levo", ima $\overline{\Delta y_T}$ negativen predznak ($\overline{\Delta y_T} < 0$) in $\overline{\Delta x_T}$ pozitiven predznak ($\overline{\Delta x_T} > 0$), kar je na sliki predstavljeno s puščicami.

Prave koordinate $\overline{\overline{T}}(\overline{\overline{y}}_T, \overline{\overline{x}}_T)$ dobimo tako, da uporabimo prave vrednosti opazovanj (d in $\overline{\alpha}$):

$$\begin{aligned} \overline{\overline{y}}_T &= d \cos(\overline{\alpha}) = d \cos(\alpha + \Delta\alpha) = d \cos(\alpha) \cos(\Delta\alpha) - d \sin(\alpha) \sin(\Delta\alpha) \\ \overline{\overline{x}}_T &= d \sin(\overline{\alpha}) = d \sin(\alpha + \Delta\alpha) = d \sin(\alpha) \cos(\Delta\alpha) + d \cos(\alpha) \sin(\Delta\alpha) \end{aligned} \tag{5}$$

Enačba 5 opisuje, kako pridemo iz točke T v točko $\overline{\overline{T}}$. Prehod je po delu krožnega loka dolžine $l = d{\cdot}\Delta\alpha$. Če bi želeli izračunati prava pogreška neznank $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$, bi uporabili enačbi 4 in enačbi 5 in dobili:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_T} &= \overline{\overline{y}}_T - y_T \\ \overline{\Delta x_T} &= \overline{\overline{x}}_T - x_T \end{aligned} \tag{6}$$

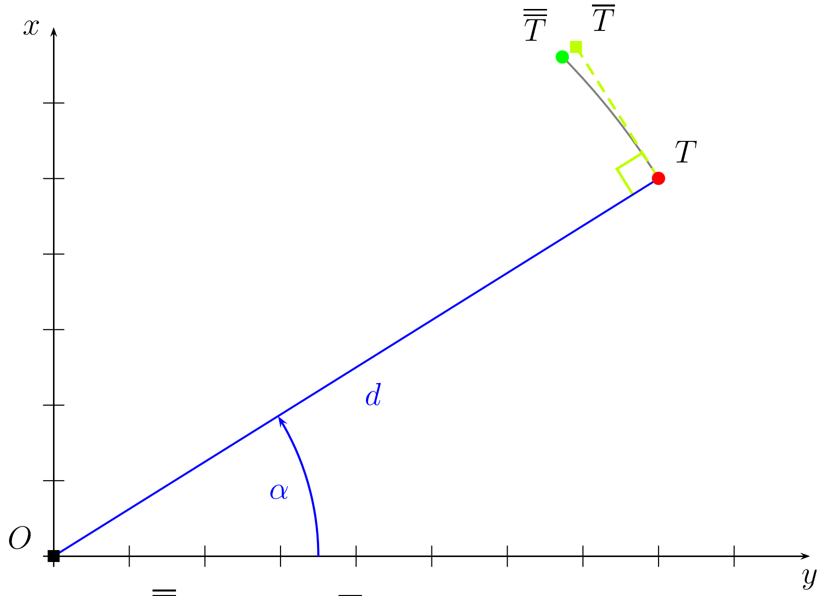
V geodezijo imamo, zaradi visoke kakovosti geodetskega inštrumentarija, pogreške opazovanj, ki so majhni v primerjavi z merjenimi vrednostmi. Zanima nas torej vpliv pogreškov na nivoju milimetrov za dolžine in sekund za kote. Če je pravi pogrešek $\Delta\alpha$ majhen, potem velja poenostavitev (izhajamo iz Taylorjeve formule):

$$\sin(\Delta\alpha) \approx \Delta\alpha \qquad \cos(\Delta\alpha) \approx 1 \tag{7}$$

Zanima nas, ali bi lahko poenostavitvi v enačbi 7 uporabili za enostavnejši izračun pravih pogreškov neznank, ki bi bil še vedno ustrezno točen. Če upoštevamo enačbo 7 in ju vstavimo v enačbi 5, dobimo:

$$\begin{aligned} \overline{y}_T &= d\cos(\alpha) - d\sin(\alpha)\,\Delta\alpha \\ \overline{x}_T &= d\sin(\alpha) + d\cos(\alpha)\,\Delta\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

V enačbi 8 smo pravi koordinati označili z $\overline{y}_T$ in $\overline{x}_T$, dobili pa smo točko $\overline{T}$, saj ta ni popolnoma enaka kot točka $\overline{\overline{T}}$. Vzrok je v tem, da smo uporabili poenostavitvi v enačbi 7, ali povedano drugače, ko smo funkciji sin in cos razvili v Taylorjevo formulo, smo zanemarili vse člene višjih redov (2., 3. in tako naprej). Geometrično opisano prikazuje slika 3.



Slika 3: Pravi položaj $\overline{\overline{T}}$ in položaj $\overline{T}$, dobljen s poenostavljeno metodo, kot posledica prisotnosti pravega pogreška $\Delta\alpha$

Na sliki 3 vidimo, da točki $\overline{\overline{T}}$ (iz enačbe 5) in $\overline{T}$ (iz enačbe 8) nimata enakih koordinat, a razlika med njima ni velika. Če točko $\overline{\overline{T}}$ dobimo tako, da točko T zasukamo za kot $\Delta\alpha$

okoli središča O in je s tem oddaljena za razdaljo $d \cdot \Delta\alpha$ **po krožnici**, točko $\overline{T}$ dobimo tako, da točko T premaknemo v isto smer, za razdaljo $d \cdot \Delta\alpha$ **po premici**, ki je pravokotna na daljico OT. Preden pokažemo, kako veliko napako δ (razdalja med $\overline{\overline{T}}$ in $\overline{T}$) smo naredili, opišimo še matematično poenostavljeno rešitev iz enačbe 8. Če pogledamo enačbi 4 in enačbi 8, lahko ugotovimo, da:

$$\begin{aligned} \overline{y}_T &= \overbrace{d\cos(\alpha)}^{y_T} \overbrace{-d\sin(\alpha)}^{y'_T(\alpha)} \Delta\alpha = y_T + y'_T(\alpha)\Delta\alpha \\ \overline{x}_T &= \underbrace{d\sin(\alpha)}_{x_T} + \underbrace{d\cos(\alpha)}_{x'_T(\alpha)} \Delta\alpha = x_T + x'_T(\alpha)\Delta\alpha \end{aligned} \tag{9}$$

V enačbi 9 količini $y'_T(\alpha)$ in $x'_T(\alpha)$ predstavljata odvoda koordinat po kotu α. Velja torej:

$$\begin{aligned} \Delta y_T &= -d\sin(\alpha)\,\Delta\alpha = y'_T(\alpha)\Delta\alpha \\ \Delta x_T &= d\cos(\alpha)\,\Delta\alpha = x'_T(\alpha)\Delta\alpha \end{aligned} \tag{10}$$

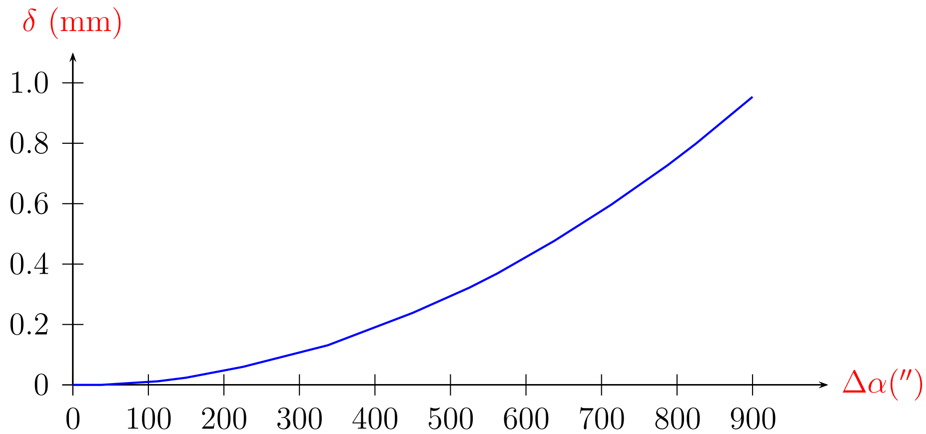
Če enačbi 9 in 10 zapišemo v matrični obliki, pa dobimo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{y}_T \\ \overline{x}_T \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta y_T \\ \Delta x_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} y'_T(\alpha) \\ x'_T(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{[\Delta\alpha]}_{\mathbf{\Delta x}} \tag{11}$$

Dobili smo točno zakon o prenosu pravih pogreškov (glej poglavje 1 in enačbo 3):

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \mathbf{J}\mathbf{\Delta x} \tag{12}$$

Pokažimo še, kako veliko napako δ naredimo, ker smo uporabili približen izračun (bolj enostaven) – zakon o prenosu pravih pogreškov. Situacija je izrisana na grafu na sliki 4.



Slika 4: Velikost napake δ [mm] (razdalja $\overline{\overline{T}} - \overline{T}$) v odvisnosti od pravega pogreška $\Delta\alpha$ [″]

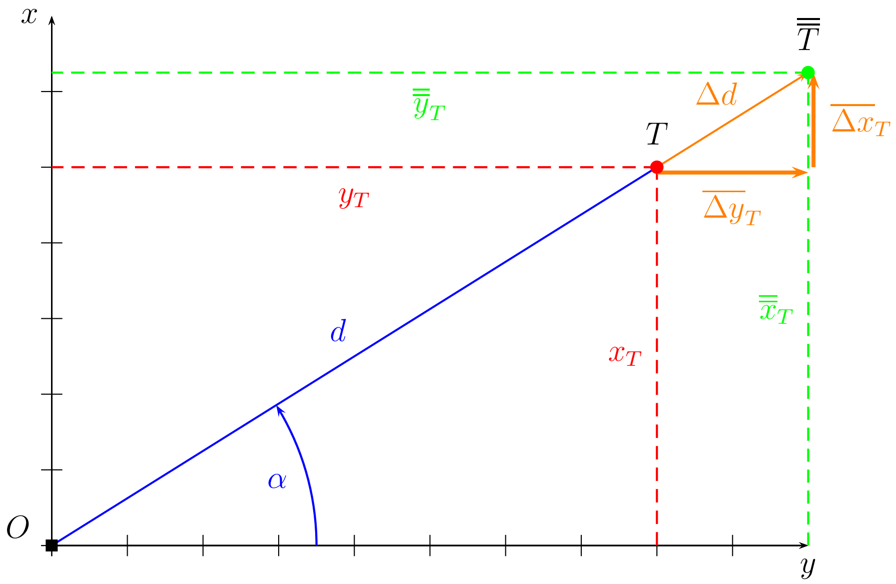
Slika 4 prikazuje vpliv napake δ v odvisnosti od pravega pogreška $\Delta\alpha$. Točka T je od izhodišča oddaljena 100 m. Enote za δ so milimetri, medtem ko so enote za $\Delta\alpha$ sekunde. Vidimo, da do napake okoli 1 mm pridemo šele pri pravem pogrešku $\Delta\alpha$ velikosti približno

$900''$ ($15'$). Velikosti pravih pogreškov neznank sta $\Delta y_T = -0.22\,\mathrm{m}$ in $\Delta x_T = 0.38\,\mathrm{m}$ (pri kotu $\alpha = 30°$). Torej, razlika pri izračunu pravih pogreškov neznank, ki sta na nivoju nekaj decimetrov, je pod 1 mm. To je zares zanemarljivo.

Kaj ugotovimo iz slike 4 in analize napake δ? Postopek prenosa pravih pogreškov je poenostavljen izračun pravih pogreškov neznank, ampak je napaka, ki jo naredilo zaradi poenostavitve dejansko zanemarljivo majhna, še posebej če upoštevamo natančnosti modernih intštrumentov. Inštrumenta, ki bi imel natančnost merjenih smeri/kotov na nivoju $15'$ že dolgo (dooolgo) ni v uporabi. Moderni tahimetri imajo pogreške velikosti nekaj sekund, za tako majhen pogrešek $\Delta\alpha$ pa je napaka δ na nivoju 1/1000 milimetra (mikrometra).

1.2.2 Vpliv pravega pogreška dolžine

Pokažimo tu še, kako vpliva pravi pogrešek dolžine Δd na izračun pravih vrednosti koordinat točk $\overline{\overline{T}}$ in točke $\overline{T}$ ter na prava pogreška obeh točk, torej na $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$ ter Δy_T in Δx_T. Grafično, kot pri pogrešku $\Delta\alpha$ na sliki 2, vpliv pogreška Δd prikazujemo na sliki 5. Tudi tu so z modro barvo označena opazovanja, z rdečo barvo približne vrednosti neznank (izračunane iz opazovanj), z oranžno barvo pravi pogreški neznank in z zeleno barvo prave vrednosti neznank (izračunane iz pravih opazovanj).



Slika 5: Vpliv pravega pogreška dolžine Δd na položaj točke T

Iz slike vidimo, da točka $\overline{\overline{T}}$ leži na isti premici kot točki T in O, le da je za vrednost pravega pogreška Δd oddaljena od točke T. In tudi tu pravi pogrešek Δd povzroči prava pogreška obeh koordinat, $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$. Za izračun koordinat točke $\overline{\overline{T}}$ izhajamo iz enačb 4 za izračun koordinat točke T, le da uporabimo prava opazovanja:

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{y}}_T &= \overline{d}\cos(\alpha) = (d + \Delta d)\cos(\alpha) = d\cos(\alpha) + \Delta d\cos(\alpha) \\
\overline{\overline{x}}_T &= \overline{d}\sin(\alpha) = (d + \Delta d)\sin(\alpha) = d\sin(\alpha) + \Delta d\sin(\alpha)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

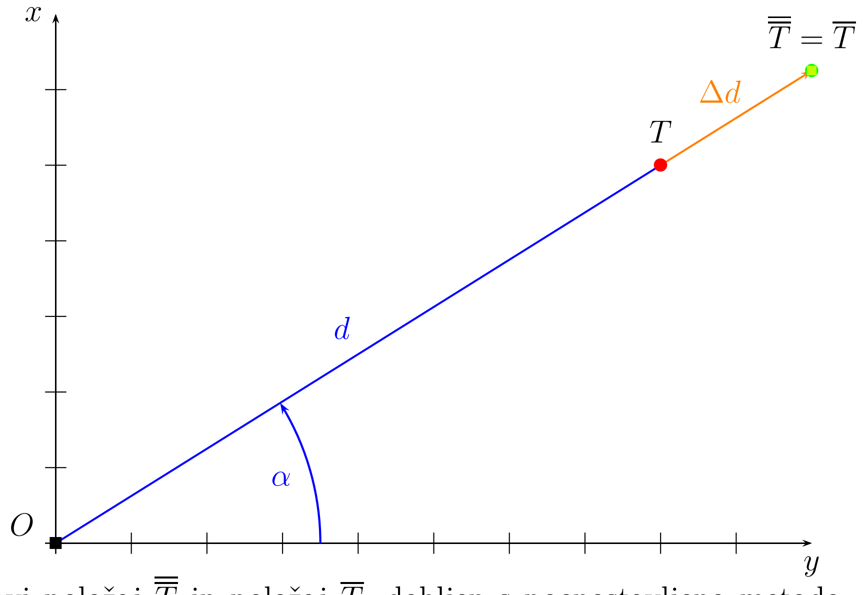
Enačba 13 opisuje, kako pridemo iz točke T v točko $\overline{\overline{T}}$. Točko T samo "potisnemo" v smeri $O \to T$ za vrednost Δd. Izračun pravih pogreškov neznank $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$ je:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_T} &= \overline{\overline{y}}_T - y_T = \Delta d \cos(\alpha) \\ \overline{\Delta x_T} &= \overline{\overline{x}}_T - x_T = \Delta d \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{14}$$

Iz enačb 14 vidimo, da sta oba prava pogreška $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$ v linearni povezavi (odvisnosti) od pravega pogreška Δd, zato lahko enačbi 13 zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{y}}_T &= \overbrace{d\cos(\alpha)}^{y_T} + \overbrace{\cos(\alpha)}^{y'_T(d)} \Delta d = y_T + y'_T(d)\Delta d = \overline{y}_T \\ \overline{\overline{x}}_T &= \underbrace{d\sin(\alpha)}_{x_T} + \underbrace{\sin(\alpha)}_{x'_T(d)} \Delta d = x_T + x'_T(d)\Delta d = \overline{x}_T \end{aligned} \tag{15}$$

Iz enačbe 15 ugotovimo, da je pravilen izračun položaja točke $\overline{\overline{T}}$ povsem enak poenostavljenemu izračunu položaja točke $\overline{T}$, ki temelji na prenosu pravih pogreškov. To je mogoče samo zato, ker sta prava pogreška koordinat Δy_T in Δx_T linearno odvisna od pravega pogreška dolžine Δd. V tem primeru pri zakonu o prenosu pravih pogreškov pridemo do povsem točnih rezultatov.



Slika 6: Pravi položaj $\overline{\overline{T}}$ in položaj $\overline{T}$, dobljen s poenostavljeno metodo, kot posledica prisotnosti pravega pogreška Δd

1.2.3 Vpliv pravega pogreška kota in dolžine

Uporabimo zakon o prenosu pravih pogreškov še za izračun pravih pogreškov Δy_T in Δx_T, če imamo pogrešen tako kot α kot tudi dolžino d. Seveda gre za kombinacijo obeh zgornjih dveh poglavij, 1.2.1 in 1.2.2. Prava pogreška opazovanj sta $\Delta\alpha$ in Δd, opazovanji pa α in d. Sestavimo vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov opazovanj $\mathbf{\Delta x}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \tag{16}$$

Neznaki sta koordinati točke T, ki se izračunata kot (funkcijska povezava):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{17}$$

Po zakonu o prenosu pravih pogreškov, sestavimo matriko $\mathbf{J}$, ki ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial d} & \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_T}{\partial d} & \frac{\partial x_T}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -d\sin\alpha \\ \sin\alpha & d\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{18}$$

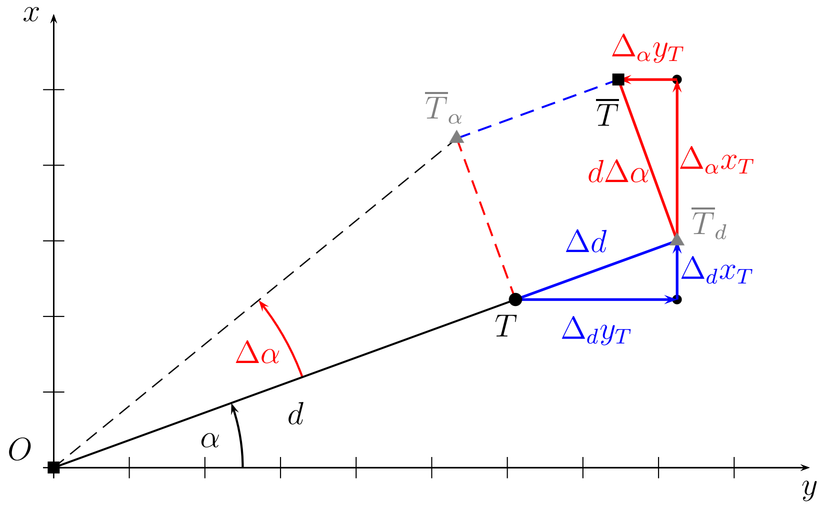
Izračun pravih pogreškov neznank je podan z:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_T \\ \Delta x_T \end{bmatrix} = \mathbf{\Delta y} = \mathbf{J\Delta x} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -d\sin\alpha \\ \sin\alpha & d\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \tag{19}$$

Iz enačbe 19 lahko oba pogreška koordinat zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \Delta y_T &= \Delta d\cos\alpha + \Delta\alpha(-d\sin\alpha) = \Delta_d y_T + \Delta_\alpha y_T \\ \Delta x_T &= \Delta d\sin\alpha + \Delta\alpha\cos\alpha = \Delta_d x_T + \Delta_\alpha x_T \end{aligned} \tag{20}$$

V enačbi 20 $\Delta_d y_T$ in $\Delta_d x_T$ prikazujeta vpliv ali doprinos pravega pogreška dolžine Δd na prava pogreška Δy_T in Δx_T. Po drugi strani pa $\Delta_\alpha y_T$ in $\Delta_\alpha x_T$ prikazujeta doprinos pravega pogreška kota $\Delta\alpha$ na prava pogreška Δy_T in Δx_T. Slika 7 grafično prikazuje elemente $\Delta_d y_T$, $\Delta_d x_T$, $\Delta_\alpha y_T$ in $\Delta_\alpha x_T$.

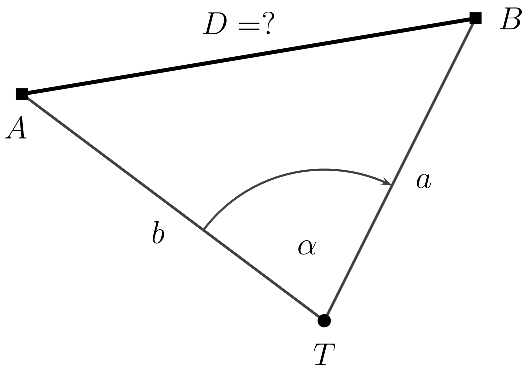


Slika 7: Doprinos pravih pogreškov opazovanj (Δd in $\Delta\alpha$) na prave pogreške neznank (Δy_T in Δx_T), preko elementov $\Delta_d y_T$, $\Delta_\alpha y_T$, $\Delta_d x_T$ in $\Delta_\alpha x_T$

Izračun pravih pogreškov neznank na osnovi zakona o prenosu pravih pogreškov nam omogoča enostavno izračunati tudi doprinose vseh pravih pogreškov opazovanj na prave pogreške vseh neznank. Na sliki 7 je prikazan vpliv obeh pravih pogreškov (Δd in $\Delta\alpha$) na prave pogreške neznank (Δy_T in Δx_T), kjer je razčlenjeno, kako pravi pogrešek vsakega opazovanja vpliva na pravi pogrešek vsake neznanke. Na sliki so s črno predstavljena opazovanja (d in α) in položaj točke T iz merjenih vrednosti opazovanj. Točki $\overline{T}_d$ in $\overline{T}_\alpha$ prikazujeta prave koordinate točke, če imamo pogrešeno samo dolžino za Δd ali samo kot za $\Delta\alpha$. Točka $\overline{T}$ pa prikazuje prave koordinate točke, če imamo pogrešeni obe opazovanji. Z modro barvo je označen doprinos pravega pogreška Δd na prava pogreška obeh koordinat, to sta $\Delta_d y_T$ in $\Delta_d x_T$, s puščico sta prikazana tudi predznaka obeh doprinosov. Po drugi strani pa je z rdečo barvo označen doprinos pravega pogreška $\Delta\alpha$ na prava pogreška obeh koordinat, to sta $\Delta_\alpha y_T$ in $\Delta_\alpha x_T$. Tudi tu puščici nakazujeta na predznak obeh elementov. Vidimo, da se doprinosa pravih pogreškov opazovanj v smeri osi x seštejeta, medtem ko se v smeri osi y odštejeta.

1.3 Primer izračuna po postopku prenosa pravih pogreškov - določitev dolžine D

Določiti želimo dolžino D med točkama A in B. A ker je med točkama ovira, dolžine neposredno ne moremo izmeriti, zato smo stabilizirali začasno točko T, na kateri smo izmerili dve stranici (a in b) in en kot (α). Situacijo prikazuje slika 8. Opazovanja s pripadajočimi pravimi pogreški so: $a = 40.00\,\mathrm{m}$ ($\Delta a = 0.03\,\mathrm{m}$), $b = 60.00\,\mathrm{m}$ ($\Delta b = -0.05\,\mathrm{m}$) in $\alpha = 45°$ ($\Delta\alpha = 2.5'$). Izračunajte dolžino D, njen pravi pogrešek ΔD in pravo vrednost $\overline{D}$. Prikažite tudi, kakšni so doprinosi pravih pogreškov posameznih opazovanj (Δa, Δb in $\Delta\alpha$) na pravi pogrešek neznanke ($\Delta_a D$, $\Delta_b D$ in $\Delta_\alpha D$).



Slika 8: Prikaz meritev za določitev dolžine D

Postopamo po korakih izračuna, ki so predstavljeni v poglavju 1.1.

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   V navodilih so podana tri opazovanja, to sta stranici a in b ter kot α, saj imamo za vsa tri opazovanja podane tudi prave pogreške ($n = 3$). Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta velikosti 3×1. Vanju vstavimo numerične vrednosti

opazovanj, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.00\,\mathrm{m} \\ 60.00\,\mathrm{m} \\ 0.785\,398\,2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.05\,\mathrm{m} \\ 0.000\,727\,2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Zanima nas dolžina D med točkama A in B. Neznanka je torej ena $(m = 1)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je velikosti 1×1 in je podan z:

$$\mathbf{y} = [D] \tag{22}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izraziti moramo, kako se dolžina D izrazi z stranicama a in b ter kotom α. Iz slike 8 vidimo, da imamo trikotnik, kjer imamo izmerjeni dve stranici in vmesni kot, računamo pa tretjo stranico. Uporabimo torej kosinusni izrek in dobimo:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \tag{23}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Uporabimo enačbo 23 v katero vstavimo vrednosti opazovanj iz enačbe 21 in izračunamo:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = 42.496\,\mathrm{m} \tag{24}$$

   V enačbi 24 smo dobili "približno" vrednost dolžine D, saj je le-ta izračunana iz pogrešenih vrednosti opazovanj.

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Ker imamo eno neznanko $(m = 1)$ in tri opazovanja $(n = 3)$, moramo izračunati tri parcialne odvode in jih damo v matriko $\mathbf{J}$, velikosti 1×3 in oblike:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial a} & \frac{\partial D}{\partial b} & \frac{\partial D}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \tag{25}$$

   Zelo pomembno je, da je vrstni red opazovanj, po katerih odvajamo v matriki $\mathbf{J}$, enak vrstnemu redu opazovanj iz vektorja $\mathbf{x}$. Parcialni odvodi so enaki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{a - b\cos\alpha}{D} = -0.057\,10 \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{a - b\cos\alpha}{D} = 0.746\,33 \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha} &= \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{ab\sin\alpha}{D} = 39.935\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{26}$$

   Matrika $\mathbf{J}$ je zato:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.057\,10 & 0.746\,33 & 39.935\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{27}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = [\Delta D] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \left[\frac{\partial D}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial D}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial D}{\partial \alpha}\Delta \alpha\right] \tag{28}$$

   Obliko pravega pogreška ΔD iz enačbe 28 dobimo z upoštevanjem pravil množenja matrike ($\mathbf{J}$) z vektorjem ($\mathbf{\Delta x}$). Vse tri količine v vsoti na desni lahko označimo z:

$$\begin{aligned} \Delta_a D &= \frac{\partial D}{\partial a}\Delta a = -0.002\,\mathrm{m} \\ \Delta_b D &= \frac{\partial D}{\partial b}\Delta b = -0.037\,\mathrm{m} \\ \Delta_\alpha D &= \frac{\partial D}{\partial \alpha}\Delta \alpha = 0.029\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{29}$$

   Produkti parcialnih odvodov neznank po opazovanjih s pripadajočimi pravimi pogreški opazovanj smo označili z $\Delta_a D$, $\Delta_b D$ in $\Delta_\alpha S$ in predstavljajo doprinose pravih pogreškov opazovanja k pravemu pogrešku neznanke. Končna vrednost pravega pogreška ΔD je:

$$\mathbf{\Delta y} = [\Delta D] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = [\Delta_a D + \Delta_b D + \Delta_\alpha D] = -0.010\,\mathrm{m} \tag{30}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = [D] + [\Delta D] = 42.486\,\mathrm{m} \tag{31}$$